

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



TRAITÉ

D'ANALYSE


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

TRAITÉ

D'ANALYSE

PAR

H. LAURENT,

EXAMINATEUR D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

> Le calcul de Leibnitz l'a mené dans des païs jusqu'ici inconnus; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles mathématiciens de l'Europe.
>
> DE L'HOSPITAL, *Calcul des infiniment petits.*

TOME II.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Augustins, 55.

1887

TRAITÉ

D'ANALYSE.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE I.

DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE PLANE QUI DÉPENDENT DES INFINIMENT PETITS DU PREMIER ORDRE.

I. — Préliminaires.

Conformément aux règles que nous avons suivies jusqu'ici, nous dirons qu'un point mobile est à l'infini, quand ce point sera susceptible de s'éloigner indéfiniment.

Deux lignes fixes ne se coupent *jamais* à l'infini, à proprement parler; deux courbes ne peuvent se rencontrer à l'infini qu'autant qu'on les considère comme limites de courbes variables.

Considérons deux courbes représentées par les équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

des degrés respectifs m et n. S'il n'existe aucune relation

entre les coefficients de ces courbes, elles se couperont en mn points réels ou imaginaires. Pour des valeurs particulières des coefficients de φ et ψ, certains points d'intersection auront pu disparaître, et, si l'on fait tendre les coefficients vers ces valeurs particulières, on voit les points qui vont disparaître s'éloigner indéfiniment; on peut donc dire que les points qui ont disparu sont à l'infini, et que deux courbes de degrés m et n se coupent toujours en mn points, en comptant ceux qui sont à l'*infini*.

II. — Coordonnées homogènes.

Il y a souvent un immense avantage à représenter les coordonnées d'un point, non plus par x et y, mais par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$. De cette façon, les équations des courbes deviennent homogènes en x, y, z, et il est facile de repasser de ces coordonnées homogènes aux coordonnées ordinaires; il suffit pour cela de supposer $z = 1$. Nous aurons plusieurs fois l'occasion d'apprécier l'utilité de ces coordonnées.

Pour le moment, nous observerons que le changement de x et y en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ n'altère pas le degré d'une courbe algébrique après l'évanouissement des dénominateurs. Ainsi, par exemple, la droite représentée par

$$ax + by + c = 0,$$

après le changement de x et y en $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, prend pour équation

$$\frac{ax}{z} + \frac{by}{z} + c = 0,$$

ou

$$(1) \qquad ax + by + cz = 0.$$

Quand on suppose que le z d'un point tend vers zéro, ce point se transporte à l'infini, si l'on suppose, comme on le fait tou-

jours, que x, y, z restent finis; l'équation $z=0$ convient donc à tous les points situés à l'infini.

Si l'on convient de dire que l'équation (1) représente toujours une droite, quels que soient a, b, c, réels, imaginaires, nuls ou différents de zéro, $cz=0$ ou $z=0$ représentera une droite ayant tous les points à l'infini; c'est ce que l'on appelle la *droite de l'infini*.

Quand tous les points d'une courbe de degré m se sont transportés à l'infini, l'équation de cette courbe prend la forme $cz^m=0$; elle doit alors être considérée comme réduite à m droites confondues et transportées à l'infini.

Les points à l'infini sur une courbe s'obtiendront en faisant $z=0$ dans l'équation rendue homogène de cette courbe; on dira alors qu'on l'a *coupée par la droite de l'infini*.

Par exemple, la courbe du second degré

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy=0,$$

coupée par la droite de l'infini $z=0$, fournit les points donnés par les équations

$$z=0 \quad \text{et} \quad Ax^2+2B''xy+A'y^2=0.$$

La dernière de ces équations fournit les directions $\frac{y}{x}$ dans lesquelles les points s'éloignent sur la courbe; si cette équation a une solution double en $\frac{y}{x}$, deux points à l'infini doivent être considérés comme *confondus*, et l'on a

$$B''^2-A'A=0;$$

la courbe est une parabole. On peut donc dire que la parabole *touche* la droite de l'infini, et que toute courbe du second degré qui *touche* la droite de l'infini est une parabole.

On sait que l'ensemble des termes de degré le plus élevé dans une équation, égalé à zéro, représente le faisceau des directions asymptotiques. D'après ce que nous venons de voir, le faisceau des directions asymptotiques coupe la droite de l'infini aux mêmes points que la courbe elle-même. Les

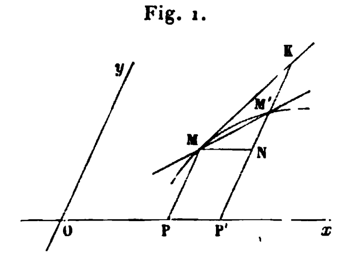
droites asymptotiques sont, si l'on veut, des droites rencontrant la courbe en un point à l'infini.

Il était bon, je crois, de rappeler ces principes, à cause de leur grande importance.

III. — Sur les tangentes aux courbes planes.

La tangente à une courbe en un point M est, comme l'on sait, la limite vers laquelle converge une sécante passant par le point M, quand un second point d'intersection tend à se confondre avec le point M. Rapportons (*fig.* 1) la courbe à

Fig. 1.



deux axes Ox, Oy; si l'on considère la sécante MM' et les coordonnées $OP = x$, $PM = y$ du point M, les coordonnées OP' et P'M' du point M' pourront être représentées par $x + \Delta x$ et $y + \Delta y$, et l'on aura

$$(1) \qquad NM' = \Delta y, \qquad PP' = MN = \Delta x.$$

Le coefficient angulaire de la sécante MM' sera $\frac{NM'}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$; ce coefficient tend vers la limite $y' = \frac{dy}{dx}$, quand Δx tend vers zéro, c'est-à-dire quand le point M' se rapproche de M. Ainsi *le coefficient angulaire de la tangente à une courbe est la dérivée de l'ordonnée du point de contact considérée comme fonction de l'abscisse.*

Soit MK la tangente en M (et cette tangente n'existera

que si $\frac{dy}{dx}$ lui-même existe), soit K le point où elle rencontre l'ordonnée P'M'; on aura

$$NK = MN.y'$$

ou bien

$$(2) \qquad NK = \Delta x.y' = y'\,dx = dy.$$

Ainsi la longueur NK est la représentation géométrique de la valeur de la différentielle dy. La longueur M'K, différence entre $\Delta y = NM'$ et $dy = NK$, est donc du second ordre, et il en sera de même de la distance du point M' à la tangente MK *a fortiori;* donc

La distance d'un point d'une courbe à la tangente menée par le point infiniment voisin est du second ordre.

IV. — Équations diverses de la tangente.

L'équation de la tangente à une courbe en un point donné de la courbe est facile à écrire, quand l'ordonnée de ce point est connue en fonction de l'abscisse, puisque l'on connaît son coefficient angulaire. On peut d'ailleurs la trouver directement comme il suit. Soient x, y les coordonnées du point de contact M; $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ ceux d'un point voisin M' pris sur la courbe; en appelant X et Y les coordonnées courantes, l'équation de la sécante MM' sera

$$Y - y = (X - x)\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

et, quand M' se confond avec M,

$$(1) \qquad Y - y = (X - x)\frac{dy}{dx}:$$

c'est l'équation de la tangente. Quand y et x sont donnés en fonction d'un paramètre t, on désigne par y' et x' les dérivées de x et y relatives à t, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'\,dt}{x'\,dt} = \frac{y'}{x'};$$

la formule (1) devient alors

$$(Y - y)x' - (X - x)y' = 0,$$

ou encore

$$(2) \qquad (Y - y)dx - (X - x)\,dy = 0.$$

Quand x et y sont liés entre eux par une relation de la forme

$$(3) \qquad f(x, y) = 0,$$

on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2},$$

f_1 et f_2 désignant, pour abréger, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$; l'équation (1) devient alors, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par cette valeur,

$$(4) \qquad (Y - y)f_2 + (X - x)f_1 = 0.$$

Nous indiquerons encore un autre moyen de parvenir à cette équation : la formule (3) différentiée donne

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0,$$

et fait connaître $\frac{dy}{dx}$, ou des quantités proportionnelles à dx, dy; si donc on porte les quantités f_2 et $-f_1$ dans (2) à la place de dx et dy, on trouve la formule (4). Cette méthode a l'avantage de faire connaître les tangentes en M quand la courbe en a plusieurs ou quand f_1 et f_2 sont nuls, ce qui revient au même, comme on le verra plus tard.

Si en effet f_1 et f_2 étaient nuls, en différentiant deux fois (3), on aurait

$$f_1\,d^2x + f_2\,d^2y + f_{11}\,dx^2 + 2f_{12}\,dx\,dy + f_{22}\,dy^2 = 0,$$

f_{11}, f_{12}, f_{22} désignant $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx\,dy}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$,

ou

$$f_{11}\,dx^2 + 2f_{12}\,dx\,dy + f_{22}\,dy^2 = 0.$$

En éliminant dx, dy au moyen de (2), on a l'équation *des* tangentes

$$f_{11}(X-x)^2+2f_{12}(X-x)(Y-y)+f_{22}(Y-y)^2=0.$$

Enfin l'équation de la tangente est encore susceptible d'une forme élégante dont nous aurons à faire souvent usage, et que nous allons faire connaître.

Si l'on rend l'équation (3) homogène par l'introduction de la variable z que l'on prendra égale à 1, après les différentiations, on aura

$$(5) \qquad mf = xf_1+yf_2+zf_3,$$

f_3 désignant la dérivée $\frac{df}{dz}$ et m le degré de l'homogénéité; or l'équation (4) peut s'écrire

$$(6) \qquad Xf_1+Yf_2-xf_1-yf_2=0;$$

et, en observant que pour un point (x, y) pris sur la courbe le premier membre de (5) est nul, on a

$$-xf_1-yf_2=zf_3,$$

et par suite (6) devient, en observant que $Z=z=1$,

$$Xf_1+Yf_2+Zf_3=0,$$

équation très simple et très symétrique.

V. — Quelques mots sur les points singuliers.

Un *point singulier* d'une courbe est un point pour lequel, l'y étant considéré comme fonction de l'x, Δy n'est pas développable par la formule de Taylor. Nous ferons plus loin la théorie complète de ces points; pour le moment nous nous bornerons aux indications suivantes.

Les *points d'arrêt* sont ceux où la courbe subit un arrêt dans sa marche : $y=(\log x)^{-1}$ a un point d'arrêt à l'origine.

Les *points anguleux* sont ceux où $\frac{dy}{dx}$ est discontinu.

Les *points isolés* sont ceux pour lesquels y a une valeur réelle, mais autour desquels y cesse d'être réel : ainsi

$$y^2 + x^2 - x^2y^2 = 0$$

présente un point isolé à l'origine.

Les *points multiples* sont ceux par lesquels il passe plusieurs branches de courbe : $xy + x^3 - y^3 = 0$ a un point double à l'origine ; $xy(x+y) = 0$, qui représente trois droites, a un *point triple* à l'origine, etc.

Les *points de rebroussement* sont des points où deux branches de courbe se touchent : $y = x^{\frac{2}{3}}$ a un rebroussement à l'origine.

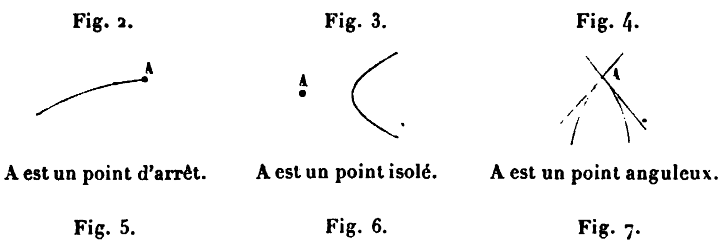


Fig. 2. A est un point d'arrêt.

Fig. 3. A est un point isolé.

Fig. 4. A est un point anguleux.

Fig. 5. A est un point double.

Fig. 6. A est un point triple.

Fig. 7. A est un rebroussement.

Un point d'une courbe $f = 0$, où $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, est singulier puisque l'on peut lui mener au moins deux tangentes et y' y est indéterminé.

VI. — Sur une propriété des tangentes.

Si l'on considère une droite mobile coupant une courbe en deux points A, B, *qui viennent se confondre en un seul* M, *situé sur la courbe, pour une position particulière de la droite, cette droite sera à la limite tangente à la courbe en* M.

En effet, soient x, y les coordonnées du point M, soient x', y' et x'', y'' celles des points A et B; le coefficient angulaire de la sécante AB est

$$\frac{y'-y''}{x'-x''};$$

or, si $y=f(x)$ est l'équation de la courbe, ce rapport devient

$$\frac{f(x')-f(x'')}{x'-x''} = \frac{(x'-x'')f'(X)}{x'-x''} = f'(X),$$

X désignant une valeur de x comprise entre x' et x''. Mais, quand x' et x'' tendent vers x, $f'(X)$ tend vers $f'(x)$, qui est le coefficient angulaire de la tangente en x.

Toutefois, pour que ce raisonnement ne soit pas en défaut, la fonction $y=f(x)$ doit pouvoir se développer par la formule de Taylor [1], pour la valeur x' de sa variable, et sa dérivée doit être continue. Le point M ne doit pas être ce que l'on appelle un *point singulier*.

VII. — Condition pour qu'une droite soit tangente à une courbe donnée.

Soit

$$f(x,y)=0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe,

$$ax+by+c=0 \tag{2}$$

celle d'une droite. Pour exprimer qu'elles sont tangentes, on peut identifier l'équation (2) avec celle d'une tangente

$$Xf_1+Yf_2+Zf_3=0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. Alors l'équation (2) rendue homogène s'écrira

$$aX+bY+cZ=0,$$

[1] Au moins limitée aux termes du premier degré, comme la démonstration le suppose.

x, y, z désignant les cordonnées du point de contact. L'identification donne

$$(3) \qquad \frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{f_3}{c};$$

ces équations font connaître le point (x, y, z) de contact; mais, pour que le contact ait lieu, il faut que les valeurs de x, y, z tirées de là satisfassent à (1) et (2). Il est facile de voir que, si elles satisfont à (1), elles satisfont à (2), car (3) donne

$$\frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{f_3}{c} = \frac{xf_1 + yf_2 + zf_3}{ax + by + cz} = \frac{mf}{ax + by + cz},$$

m désignant le degré de f, et, comme $f = 0$, on a

$$ax + by + cz = 0.$$

Si de (3) on tire x, y, z pour les porter dans (1) ou (2), en d'autres termes, si l'on élimine x, y, z entre (2) et (3), on aura la condition cherchée. Pour faire cette élimination, on peut remplacer le système (3) par le suivant :

$$(4) \qquad f_1 + a\rho = 0, \qquad f_2 + b\rho = 0, \qquad f_3 + c\rho = 0;$$

il faut alors éliminer x, y, z, ρ entre (2) et (4), ce qui revient à éliminer x, y, z, ρ entre les équations obtenues en égalant à zéro les dérivées de

$$f(x, y, z) + \rho(ax + by + cz) = 0,$$

prises par rapport à x, y, z et ρ.

Exemple. — Pour trouver la condition de contact de la droite

$$ax + by + c = 0$$

avec la conique

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0,$$

on ajoutera au premier membre $\rho(ax + by + cz)$, on égalera à zéro les dérivées de

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + \rho(ax + by + cz)$$

et on éliminera x, y, z, ρ, ce qui donne la condition cherchée

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & a \\ B'' & A' & B & b \\ B' & B & A'' & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Autrement : la condition de contact peut encore s'obtenir en cherchant le faisceau des droites issues de l'origine et passant par les intersections de (1) et (2); si l'on exprime que ce faisceau contient une droite double, on a la condition cherchée.

En rendant les équations (1) et (2) homogènes, on a

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0, \qquad ax + by + cz = 0,$$

et, en éliminant z, on a une conséquence homogène de (1) et (2); en effet, la résultante est homogène et elle a lieu quand les équations (5) ont lieu, quel que soit z, et en particulier quand $z = 1$; ainsi

$$f\left(x, y, -\frac{ax + by}{c}\right) = 0$$

est l'équation d'un faisceau de droites, et ces droites passent par l'origine et par les intersections de (1) et (2). Écrivons que cette équation en x et y, ou plutôt en $\frac{y}{x}$, a une racine double et nous aurons la condition cherchée.

Autrement encore : on peut exprimer qu'en éliminant x entre (1) et (2) la résultante en y a une racine double. Quand on donne l'angle α que la droite fait avec l'axe des x, on peut poser

$$x = x_0 + \rho \cos\alpha, \qquad y = y_0 + \rho \sin\alpha,$$

éliminer x et y entre ces formules et (1), ce qui donne

$$f(x_0 + \rho \cos\alpha, y_0 + \rho \sin\alpha) = 0,$$

et exprimer que cette équation a une racine double en ρ. On obtient alors une relation entre x_0 et y_0, qui représente le lieu

des points d'où l'on peut mener des tangentes à la courbe sous une inclinaison donnée. C'est l'équation de toutes les tangentes parallèles à la direction α.

Il est bon de se rendre compte du degré de l'équation en a, b, c, qui exprime la condition de contact de la droite $ax + by + c = 0$ et de la courbe $f = 0$.

Nous supposerons la courbe de degré m : alors les équations

$$\frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{f_3}{c},$$

$$ax + by + c = 0$$

peuvent se ramener à

$$\frac{1}{a} f_1\left(-\frac{by + c}{a}, y\right) = \frac{1}{b} f_2\left(-\frac{by + c}{a}, y\right) = \frac{1}{c} f_3\left(-\frac{by + c}{a}, y\right)$$

ou, en supposant, ce qui est permis, $a = 1$,

$$b f_1(by + c, y) = f_2(by + c, y),$$
$$c f_1(by + c, y) = f_3(by + c, y).$$

Ces équations sont de degré $m - 1$ en y : leur résultante sera du degré $m - 1$ par rapport à leurs coefficients qui sont de degrés m en a et b ; cette résultante sera donc de degré $m(m - 1)$. Ainsi *la condition pour que la droite*

$$ax + bx + c = 0$$

touche une courbe de degré m est de degré $m(m - 1)$ [1].

VIII. — Mener une tangente à une courbe par un point extérieur.

Pour mener une tangente à une courbe

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

[1] Ce degré peut s'abaisser, comme on le verra par la suite, mais nous nous maintenons ici dans les généralités. Il est presque inutile de faire observer que les deux dernières méthodes que nous venons de donner ne fournissent pas toujours la condition *suffisante* du contact ; deux racines de la résultante en y, par exemple, peuvent accidentellement devenir égales sans qu'il y ait contact.

par un point extérieur (x_0, y_0), on peut suivre plusieurs procédés :

1° On peut écrire l'équation d'une tangente

$$Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0$$

et exprimer qu'elle passe par le point (x_0, y_0), ce qui donne

$$(2) \qquad x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

où $z_0 = 1$. Cette équation fait connaître x, y, z en la joignant à l'équation proposée (1); les coordonnées x, y, z du point de contact étant connues, on en conclut l'équation de la tangente. Les équations (1), (2) auront en général plusieurs solutions; si (1), par exemple, est algébrique et de degré m, l'équation (2) sera de degré $m - 1$ en x, y, et les formules (1) et (2) fourniront $m(m-1)$ valeurs de x et de y; donc, en général :

Par un point donné, on pourra mener $m(m-1)$ tangentes à une courbe de degré m.

L'équation (2) représente une courbe que nous rencontrerons plus loin sous le nom de *polaire* du point (x_0, y_0). Dans les coniques, elle se réduit à une droite qui est la corde des contacts relative aux tangentes issues de (x_0, y_0).

Si, entre les équations (1), (2) et

$$Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0,$$

on élimine x, y, z, on aura l'équation de l'ensemble des tangentes issues de x_0, y_0.

2° On peut considérer la droite

$$x = x_0 + a\rho, \qquad y = y_0 + b\rho,$$

éliminer x et y, ce qui donne

$$f(x_0 + a\rho, y_0 + b\rho) = 0,$$

et exprimer que la résultante a une racine double en ρ; ce qui revient à éliminer ρ entre cette équation et

$$a \frac{\partial f}{\partial(x_0 + a\rho)} + b \frac{\partial f}{\partial(y_0 + b\rho)} = 0.$$

Soit

$$F(x_0, y_0, a, b) = 0$$

la résultante ; elle fait connaître le paramètre variable contenu dans a et b (si, par exemple, $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$, le paramètre sera l'angle α que la droite fait avec l'axe des x). En éliminant le paramètre variable entre cette équation et

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

on aura l'équation cherchée de toutes les tangentes.

On mène une tangente à une courbe parallèlement à une droite donnée en exprimant que la droite

$$ax + by + c = 0$$

touche la courbe : a et b sont censés donnés, et, en éliminant ρ, x, y, z entre les dérivées égalées à zéro de (p. 10)

$$f + \rho(ax + by + cz),$$

on a une équation qui détermine c; l'élimination de c entre cette équation et $ax + by + cz = 0$ fera connaître l'ensemble des tangentes parallèles à la direction a, b.

On peut remarquer que l'équation en c est de degré $m(m-1)$ et que, par suite, on peut mener $m(m-1)$ tangentes de direction donnée à une courbe d'ordre m. D'ailleurs, soit

$$Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0$$

l'équation d'une tangente ; si l'on pose

$$\frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b},$$

elle restera parallèle à la direction a, b. Cette équation jointe à (1) fait connaître les points de contact, qui sont, comme l'on voit, au nombre de $m(m-1)$.

IX. — Tangente commune à deux courbes.

On peut mener une tangente commune à deux courbes :

1° En exprimant qu'une droite

$$(1) \qquad ax + by + cz = 0$$

est tangente à chaque courbe ; on obtient alors deux équations en a, b, c, et l'élimination des rapports de ces trois quantités entre ces deux équations et l'équation (1) fera connaître l'équation de toutes les tangentes communes. Si l'une des courbes est de degré m, l'autre de degré n, les équations en a, b, c seront de degrés $m(m-1)$ et $n(n-1)$; ainsi :

Le nombre des tangentes communes à deux courbes de degrés m et n est $mn(m-1)(n-1)$.

2° On peut exprimer aussi qu'une tangente

$$Xf_1 + Yf_2 + Zf_3 = 0$$

touche la seconde courbe $\varphi(x', y', z') = 0$; on a alors

$$\frac{f_1}{\varphi_1} = \frac{f_2}{\varphi_2} = \frac{f_3}{\varphi_3};$$

ces équations, jointes à celles des deux courbes, feront connaître x, y et x', y' coordonnées des points de contact (¹).

X. — De la normale aux courbes.

La normale à une courbe au point M est la perpendiculaire en M à la tangente à la courbe menée en ce point. L'équation de la tangente affectant l'une des formes

$$(X - x)\,dy - (Y - y)\,dx = 0,$$
$$(X - x)f_1 + (Y - y)f_2 = 0,$$

(¹) Les conclusions auxquelles nous venons de parvenir dans les deux paragraphes précédents peuvent être modifiées par la présence des points singuliers, mais nous ne pouvons pas examiner tous les cas qui peuvent se présenter, en ce moment. La même remarque est applicable à un grand nombre de faits énoncés dans les paragraphes suivants.

où $f = 0$ désigne l'équation de la courbe, l'équation de la normale en coordonnées rectangulaires sera

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0,$$

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2}.$$

Il en résulte que f_1 et f_2 sont proportionnels aux cosinus des angles que la normale fait avec les axes. Quand on a $f_1^2 + f_2^2 = 1$, f_1 et f_2 sont précisément les cosinus en question.

Pour mener une normale à la courbe $f = 0$ par un point extérieur (x_0, y_0), on écrit que l'équation de la normale est satisfaite par les coordonnées x_0, y_0; on a alors

$$\frac{x_0 - x}{f_1} = \frac{y_0 - y}{f_2}.$$

Cette équation, jointe à $f = 0$, fait connaître les coordonnées du point (x, y), où la normale rencontre la courbe. Si f est de degré m, l'équation précédente est de degré m aussi; par suite :

Par un point extérieur on peut mener m^2 normales à une courbe d'ordre m.

Exemple. — La courbe donnée étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation qui donne les pieds des normales est de la forme

$$\frac{x_0 - x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_0 - y}{\frac{y}{b^2}} = -\rho;$$

si l'on en tire x et y pour les porter dans l'équation de la courbe, on a

$$\frac{x_0^2}{a^2\left(1 - \frac{\rho}{a^2}\right)^2} + \frac{y_0^2}{b^2\left(1 - \frac{\rho}{b^2}\right)^2} = 1.$$

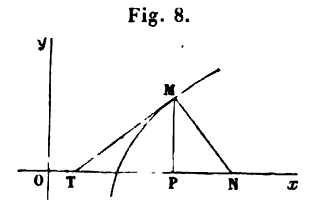
Cette équation a toujours deux racines réelles; on pourra donc

toujours mener deux normales réelles à l'ellipse par un point extérieur.

XI. — Des lignes appelées normale, tangente, sous-normale, sous-tangente.

Soient MP (*fig.* 8) l'ordonnée y d'une courbe quelconque,

Fig. 8.



MT sa tangente terminée à l'axe des x, MN sa normale également terminée à l'axe des x.

MT, la tangente, sera désignée par	T
MN, la normale, par	N
PN, la sous-normale, par	S_n
PT, la sous-tangente, par	S_t

Soit $y' = \dfrac{dy}{dx}$, nous aurons

$$(1) \qquad \mathrm{PN} = S_n = y \operatorname{tang} \mathrm{PMN} = yy',$$

$$(2) \qquad \mathrm{MN} = \mathrm{N} = \sqrt{y^2 + S_n^2} = \sqrt{y^2(1+y'^2)} = y\sqrt{1+y'^2},$$

$$(3) \qquad \mathrm{TP} = S_t = y \operatorname{tang} \mathrm{TMP} = \frac{y}{\operatorname{tang} \mathrm{PTM}} = \frac{y}{y'},$$

$$(4) \qquad \mathrm{MT} = \mathrm{T} = \sqrt{y^2 + S_t^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}.$$

Théorème I. — *Toutes les courbes qui pour une même abscisse ont même sous-normale ont une différence de carrés d'ordonnées constante, et réciproquement.*

Soient, en effet, y et z les ordonnées des deux courbes : en vertu de (1),

$$yy' = zz',$$

on en conclut

$$y^2 = z^2 + \text{const.}$$

1° L'hyperbole $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ et son asymptote $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$ ont une différence de carrés d'ordonnées constante et égale à b^2, elles ont même sous-normale; on en conclut un moyen élégant de tracer la normale à l'hyperbole, quand on a tracé les asymptotes.

2° L'équation de l'ellipse est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, sa sous-normale est la même que celle des droites $y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2$, mais elle est dirigée dans un autre sens; néanmoins cela fournit une construction assez simple de la normale.

3° Dans la parabole $y^2 = 2px$, la sous-normale yy' est égale à p; elle est donc constante : de là encore une construction facile. La parabole est d'ailleurs la seule courbe dans laquelle la sous-normale soit constante, car de $yy' = \text{const.} = p$ on conclut $\frac{y^2}{2} = px + \text{const.}$

Théorème II. — *Lorsque dans deux courbes les ordonnées y, z, correspondant à une même abscisse x, sont proportionnelles, les sous-tangentes sont égales, et réciproquement.*

En effet, de l'équation $y = Kz$ on conclut, en supposant K constant,

$$y' = Kz' \quad \text{et} \quad \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

ce qui montre, en vertu de (3), que les sous-normales sont égales; réciproquement, de

$$\frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

on tire

$$\frac{y'}{y} = \frac{z'}{z}$$

ou, en appelant K une constante,

$$\log y = \log Kz, \qquad y = Kz$$

XII. — Sur les coordonnées trilinéaires.

Il y a souvent avantage à représenter un point M par ses distances à deux droits fixes CA et CB; soient (*fig.* 9)

Fig. 9.

$MP = x$, $MQ = y$ ces distances; si l'on prend CB pour axe des ordonnées et CA pour axe des abscisses, les coordonnées $MP' = \xi$, $MQ' = \eta$ seront liées à x et à y par les formules

$$(1) \qquad \xi = \frac{x}{\sin C}, \qquad \eta = \frac{y}{\sin C}.$$

Ainsi la connaissance de ξ et de η entraînera celle de x et y, et *vice versa,* de sorte que x et y seront, au même titre que ξ et η, des *coordonnées* du point M. Étant donnée une figure par son équation

$$f(\xi, \eta) = 0$$

en coordonnées ordinaires, elle sera représentée aussi bien par l'équation

$$(2) \qquad f\left(\frac{x}{\sin C}, \frac{y}{\sin C}\right) = 0$$

en coordonnées x, y.

Cela posé, traçons une droite quelconque AB coupant AC et BC, appelons z la distance du point M à cette droite que

nous supposerons fixe; z dépendra de x et de y et sera lié à ces variables par l'équation

$$ax + by + cz = 2s,$$

où a, b, c désignent les côtés du triangle ABC et où s désigne sa surface; on tire de là

$$1 = \frac{ax + by + cz}{2s}, \tag{3}$$

et l'équation (2) s'écrit alors

$$f\left[\frac{x.2s}{(ax + by + cz)\sin C}, \frac{y.2s}{(ax + by + cz)\sin C}\right] = 0;$$

sous cette forme elle est homogène et ne contient plus que les rapports $x : y : z$.

Les quantités x, y, z (et même plus souvent des quantités égales à x, y, z multipliées par des facteurs constants) sont ce que l'on appelle les *coordonnées trilinéaires* du point M, le triangle ABC est appelé le *triangle de référence*. Les formules (1) et (3) permettent de passer des coordonnées ordinaires aux coordonnées trilinéaires et *vice versa*. On voit que ces formules sont générales, pourvu que l'on convienne, ainsi que nous le ferons, de regarder x, y, z comme positifs si, en les comptant à partir des côtés du triangle de référence, ils sont orientés de la même façon que les coordonnées trilinéaires des points intérieurs au triangle, et de les regarder comme négatifs dans le cas contraire.

Toute courbe, d'après ce que nous venons de voir, a une équation en coordonnées trilinéaires, et l'on peut même ajouter que *toute courbe algébrique d'ordre m a une équation de degré m en coordonnées trilinéaires;* ainsi, par exemple, *l'équation de la droite est du premier degré.*

Mais la réciproque n'est pas vraie; nous allons voir, en effet, que *toute équation du premier degré ne représente pas une droite.*

Considérons, par exemple, l'équation

$$(1) \qquad lx + my + nz = 0;$$

si nous rapportons le triangle de référence à deux axes rectangulaires situés dans son plan, les équations de ses côtés seront

$$\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p = 0, \quad \text{pour BC,}$$
$$\xi \cos\beta + \eta \sin\beta - q = 0, \quad \text{pour CA,}$$
$$\xi \cos\gamma + \eta \sin\gamma - r = 0, \quad \text{pour AB,}$$

α, β, γ; p, q, r ayant des significations bien connues; et l'on aura

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p,$$
$$y = \dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$z = \dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

l'équation (1) deviendra alors, avec les coordonnées ordinaires ξ, η,

$$\xi(l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma)$$
$$+ \eta(l\sin\alpha + m\sin\beta + n\sin\gamma) - lp - mq - nr = 0.$$

Cette équation du premier degré en ξ et η représente bien, en général, une droite; cependant, si l'on avait à la fois

$$l\cos\alpha + m\cos\beta + n\cos\gamma = 0,$$
$$l\sin\alpha + m\sin\beta + n\sin\gamma = 0$$

ou

$$\frac{l}{\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma} = \frac{m}{\sin\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha} = \frac{n}{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta},$$

elle ne représenterait plus rien du tout. Or, si l'on observe que

$$\sin\gamma\cos\beta - \sin\beta\cos\gamma = \sin(\gamma - \beta)$$

et que $\gamma - \beta$ est l'angle que font entre eux les côtés AB et AC du triangle de référence ou son supplément, on aura

$$\frac{l}{\sin A} = \frac{m}{\sin B} = \frac{n}{\sin C},$$

et l'équation (1) devient

$$x \sin A + y \sin B + z \sin C = 0$$

ou

$$(2) \qquad ax + by + cz = 0.$$

Nous avons vu que le premier membre de cette équation représente $2s$, double de l'aire du triangle de référence; l'équation (1) ou la précédente ne représente donc rien.

On dit cependant alors que l'équation (1) ou (2) représente la *droite de l'infini*. Expliquons cette locution : supposons que l, m, n, d'abord différents de a, b, c, tendent vers ces quantités, mais de manière que l'on n'ait pas constamment

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}.$$

Les coefficients de ξ et η, différents de zéro, tendront vers zéro, les coordonnées à l'origine de la droite (1) croîtront indéfiniment, la droite en question s'éloignera indéfiniment et l'on pourra dire que l'équation (2) représente la *droite de l'infini*.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce sujet, on voit qu'une équation du second degré en x, y, z pourra représenter une droite ou même rien du tout; on dira alors qu'elle représente deux droites, dont l'une est la droite de l'infini, ou une droite double située à l'infini, etc.

Supposons que p, q, r, s, ... représentent les distances d'un point à des droites P, Q, R, S, ..., ayant pour équations respectivement, en coordonnées rectangulaires,

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p_1 = 0,$$
$$x \cos\beta + y \sin\beta - q_1 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

toute équation de la forme

$$f(x, y) = 0$$

pourra, et cela d'une infinité de manières, si p, q, r, ...

sont en nombre supérieur à deux, se mettre sous la forme

$$(1)\qquad F(p, q, r, s, \ldots)=0.$$

J'ajoute que la fonction F pourra être supposée homogène si $p, q, r, \ldots$ sont au nombre de trois au moins, en sorte que toute courbe pourra être représentée par une équation telle que (1); mais toute équation, telle que (1), ne représentera pas nécessairement une courbe située à distance finie; $p, q, r, \ldots$ peuvent alors être considérés comme des coordonnées *multilinéaires*.

XIII. — Tangentes en coordonnées multilinéaires et en particulier en coordonnées trilinéaires.

Soit

$$(1)\qquad f(p, q, r, s, \ldots)=0$$

l'équation d'une courbe en coordonnées multilinéaires (*voir* le paragraphe précédent); $p, q, r, s, \ldots$ seront alors les distances d'un point de la courbe à des droites P, Q, R, S, ... représentées en coordonnées ordinaires par

$$(2)\qquad \begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1=0,\\ x\cos\beta+y\sin\beta-q_1=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

L'équation de la tangente à la courbe (1) est, en coordonnées ordinaires,

$$(3)\qquad (X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0;$$

or on a

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial x}+\ldots,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial q}{\partial y}+\ldots; \end{cases}$$

mais

$$(5)\qquad \begin{cases} p=x\cos\alpha+y\sin\alpha-p_1,\\ q=x\cos\beta+y\sin\beta-q_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots; \end{cases}$$

donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos\alpha, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \sin\alpha, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \cos\beta, \qquad \ldots.$$

Les formules (4) deviennent alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\beta + \ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}\sin\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\sin\beta + \ldots,$$

et (3) donne, pour l'équation de la tangente,

$$[(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\sin\alpha]\frac{\partial f}{\partial p}$$
$$+ [(X - x)\cos\beta + (Y - y)\sin\beta]\frac{\partial f}{\partial q} + \ldots = 0$$

ou, en vertu de (5) et si l'on appelle P, Q, R, ... ce que deviennent p, q, r, ... quand on y remplace x par X et y par Y, c'est-à-dire les distances des points X, Y, ..., aux droites P, Q, R, ...,

$$(P - p)\frac{\partial f}{\partial p} + (Q - q)\frac{\partial f}{\partial q} + \ldots = 0; \tag{6}$$

si l'équation (1) est homogène, on a

$$p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q} + \ldots = mf = 0,$$

m désignant le degré de f, et (6) devient simplement

$$P\frac{\partial f}{\partial p} + Q\frac{\partial f}{\partial q} + R\frac{\partial f}{\partial r} + \ldots = 0.$$

Telle est la forme remarquable qu'affecte l'équation de la tangente en coordonnées multilinéaires.

En coordonnées trilinéaires, par exemple, l'équation de la tangente à la courbe

$$f(x, y, z) = 0,$$

au point (x, y, z), est

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Pour faire une application des considérations précédentes, cherchons à exprimer que l'équation du second degré

$$f = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

représente une parabole. Il suffit d'exprimer que cette courbe est tangente à une droite qui s'est éloignée indéfiniment; en d'autres termes, elle est tangente à la droite de l'infini

$$ax + by + cz = 0,$$

ou, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$aX + bY + cZ = 0;$$

pour que cette droite soit tangente à la courbe $f = 0$, il faut qu'elle puisse s'identifier avec l'équation d'une tangente

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ou que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x} : a = \frac{\partial f}{\partial y} : b = \frac{\partial f}{\partial z} : c = \frac{x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}}{ax + by + cz}.$$

Si l'on égale ces rapports à ρ et si l'on observe que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f = 0,$$

si enfin on remplace les dérivées de f par leurs valeurs, on a

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z - \rho a &= 0,\\ B''x + A'y + Bz - \rho b &= 0,\\ B'x + By + A''z - \rho c &= 0;\\ ax + by + cz &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & a \\ B'' & A' & B & b \\ B' & B & A'' & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la condition pour que la conique touche la droite

$ax + by + cz = 0$; si cette droite est la droite de l'infini, c'est-à-dire si a, b, c sont les côtés du triangle de référence, l'équation précédente exprimera que la conique en question est une parabole.

XIV. — Théorème de Poinsot.

Les considérations précédentes touchent de très près à un théorème remarquable dû à Poinsot ([1]) et qué nous allons démontrer.

Soient p, q, r, ... les distances d'un point M *à des lignes fixes* P, Q, R, ..., *distances comptées sur les normales menées de ce point* M *à ces lignes, l'équation*

$$f(p, q, r, \ldots) = 0$$

définira en général une courbe, et la normale à cette courbe au point M *s'obtiendra en cherchant la résultante de droites égales à $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, ... respectivement portées à partir du point* M *sur les lignes p, q, r, ... vers les lignes* P, Q, R, ..., *ou en sens inverse suivant que $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, ... seront positifs ou négatifs.*

En effet, soient x, y les coordonnées de M, soient a, b les coordonnées du point où la normale p rencontre la ligne P; a', b' les coordonnées du point où la normale q rencontre la ligne Q, ...; nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x} + \ldots; \tag{1}$$

or

$$p^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2,$$

et, en différentiant,

$$p\,dp = (x-a)dx + (y-b)dy - (x-a)da - (y-b)db;$$

([1]) Ou du moins utilisé par lui dans une circonstance importante.

mais $(x-a)da+(y-b)db$ est nul, puisque le déplacement da, db, effectué le long de la ligne P, est normal à la direction $x-a$, $y-b$ de la droite p; on a donc

$$dp = \frac{x-a}{p}\,dx + \frac{y-b}{q}\,dy.$$

En appelant α l'angle de la droite p avec l'axe des x, on a

$$\frac{x-a}{p} = \cos\alpha, \qquad \frac{y-b}{p} = \sin\alpha,$$

donc

$$dp = \cos\alpha\,dx + \sin\alpha\,dy;$$

donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos\alpha, \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \cos\alpha', \qquad \ldots,$$

α', α'', ... désignant les angles que les droites q, r, ... font avec l'axe des x, l'équation (1) devient alors

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial r}\cos\alpha'' + \ldots.$$

Or, si l'on pose

$$\mathrm{N} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

et si l'on appelle φ l'angle que la normale fait avec l'axe des x, on a

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\varphi \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{N}\cos\varphi;$$

la formule (2) donne alors

$$\mathrm{N}\cos\varphi = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\alpha' + \frac{\partial f}{\partial r}\cos\alpha'' + \ldots;$$

donc la ligne N portée sur la normale à la courbe $f = 0$ a pour projection sur l'axe des x, et aussi sur l'axe des y, une ligne égale à la somme des projections de $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, ... portées sur les droites p, q, r, ...; il faut en conclure que la

normale à la courbe $f = 0$ en M est dirigée suivant la résultante de ces droites; si $\frac{\partial f}{\partial p}$ était négatif, il faudrait le remplacer par sa valeur absolue comptée dans la direction $\pi + \alpha$, ... Le théorème en question se trouve donc démontré.

Nous allons en faire quelques applications, mais observons pour cela que le théorème subsiste quand aux courbes P, Q, ... on substitue des points fixes. La démonstration dans ce cas est d'ailleurs plus simple, en ce sens que a, b, a', b', ... sont constants.

XV. — Tangentes à quelques courbes en coordonnées multipolaires.

L'ellipse peut être définie par une équation de la forme

$$p + q = 2a,$$

p et q désignant les distances d'un point de la courbe aux foyers; la normale en un point quelconque s'obtiendra en composant des droites égales à 1, portées sur les rayons vecteurs, car ici $\frac{\partial f}{\partial p} = 1$, $\frac{\partial f}{\partial q} = 1$, mais on obtient alors la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs. L'équation de l'hyperbole dans ce système de coordonnées serait

$$p - q = 2a,$$

et la normale s'obtiendrait en composant des droites égales à l'unité, portées sur un rayon vecteur et le prolongement de l'autre, ce qui fournit une construction connue.

La *lemniscate* est une courbe telle que le produit de ses rayons vecteurs p, q, issus de deux points fixes P, Q, est constant; on a donc, en appelant C une constante, pour tout point de la lemniscate,

$$pq = C.$$

Ici, $\frac{\partial f}{\partial p} = q$, $\frac{\partial f}{\partial q} = p$; on obtiendra donc la normale en composant deux droites égales chacune à un rayon vecteur, mais portée sur la direction de l'autre rayon.

Le lieu des points, tels que l'on ait $p^2 + q^2 =$ const., est un cercle; on peut vérifier que la construction de Poinsot fournit un rayon. Le lieu des points, tels que l'on ait $\frac{p}{q} =$ const., est un cercle; en mettant cette équation sous la forme

$$ap - bq = 0,$$

on obtient une construction de la normale, qui consiste à chercher la résultante de deux droites proportionnelles à a et $-b$, ou à q et $-p$, portées sur les rayons vecteurs, construction analogue à celle de la normale à la lemniscate.

Si $p, q, r, \ldots$ désignent les distances d'un point M à des points fixes,

$$ap^2 + bq^2 + cr^2 + \ldots = \text{const.}$$

représentera un cercle; la normale en un point M de ce cercle sera dirigée suivant la résultante de droites de longueur ap, by, cr, ... portées sur les rayons vecteurs p, q, r, ..., et l'on pourrait multiplier les exemples à l'infini.

Mais revenons au cas général et supposons une courbe définie par des coordonnées bipolaires, c'est-à-dire par les distances p, q de chacun de ses points M à deux points fixes P, Q.

Si

$$f(p, q) = 0$$

est l'équation de la courbe, la résultante des droites $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$ portées sur les rayons vecteurs MP, MQ donne la direction de la normale en M. Mais le rapport $\frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q}$, identiquement égal à $-\frac{dq}{dp}$, fait connaître le rapport des sinus des angles que la normale fait avec les rayons vecteurs. Car $\frac{\partial f}{\partial p}$ et $\frac{\partial f}{\partial q}$ sont proportionnels aux côtés du parallélogramme dont la diagonale est normale à la courbe, et les sinus de α et β sont aussi proportionnels à ces côtés. En appelant α l'angle que le

rayon p fait avec la normale, β l'angle que le rayon q fait avec la normale, on a donc

$$\frac{\partial f}{\partial p} : \frac{\partial f}{\partial q} = \sin\beta : \sin\alpha,$$

et, par suite,

$$(a) \qquad -\frac{dq}{dp} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

ou, si l'on veut,

$$\sin\beta\, dp + \sin\alpha\, dq = 0,$$

relation importante dont on peut tirer une foule de conséquences. En voici quelques-unes :

Quelles sont les courbes dans lesquelles la normale partage en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs issus de deux points fixes?

On doit avoir

$$\alpha = \beta, \qquad \text{donc} \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 1;$$

donc

$$-\frac{dq}{dp} = 1 \qquad \text{ou} \qquad dp + dq = 0;$$

on en conclut $p + q = \text{const.}$, et l'ellipse, comme l'on voit, est la seule courbe jouissant de cette propriété.

Quelle courbe faudrait-il prendre pour méridien d'une lentille pour que les rayons lumineux issus d'un foyer P *allassent tous converger en un même point* Q?

Dans la courbe en question $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ (ou l'indice de réfraction) est constant; on a donc

$$-\frac{dq}{dp} = n \qquad \text{ou} \qquad dq + n\, dp = 0.$$

On en conclut, pour l'équation des courbes cherchées,

$$q + np = \text{const.};$$

ces courbes portent le nom d'*ovales de Descartes;* elles

jouissent de propriétés curieuses et nous les retrouverons plus loin.

Passons maintenant à d'autres applications du théorème de Poinsot.

XVI. — Tangentes dans le système pôle-directrice.

Dans le système pôle-directrice, un point est déterminé par ses distances δ à une droite fixe D, et f à un point fixe F; la droite est dite directrice, le point F est le foyer ou pôle. Une relation, telle que

$$\varphi(\delta, f) = 0,$$

définit une courbe; la normale à cette courbe, en vertu du théorème de Poinsot, est la résultante de deux droites $\frac{\partial\varphi}{\partial\delta}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial f}$ portées, l'une normalement à la directrice, l'autre dans le sens du rayon vecteur. L'équation des coniques, dans ce système, est

$$f = e\delta \quad \text{ou} \quad f - e\delta = 0,$$

e désignant l'excentricité. La normale est la résultante de deux droites 1 et $+e$ portées sur le rayon vecteur et sur la perpendiculaire à la directrice, mais en sens inverse de cette perpendiculaire. Ces lignes 1 et e peuvent être remplacées par les lignes proportionnelles δ et $e\delta$ ou δ et f. Quand $e = 1$, on a une parabole et l'on retrouve la propriété connue de sa normale.

Soit α l'angle que la normale fait avec le rayon f et β l'angle qu'elle fait avec la perpendiculaire à la directrice; on aura

$$\frac{\partial\varphi}{\partial f} : \frac{\partial\varphi}{\partial\delta} = -\frac{d\delta}{df} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Dans les coniques, cette relation donne

$$-\frac{f}{\delta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

ou, en appelant α' et β' les angles que la tangente fait avec f et δ,

$$-\frac{f}{\delta}=\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}$$

ou encore, en faisant abstraction du signe,

$$\frac{f}{\cos\alpha'}=\frac{\delta}{\cos\beta'}=\mathrm{T}.$$

Cette équation exprime que la même longueur T, projetée sur la ligne δ et sur le rayon f, donne pour projections δ et f. Si l'on suppose cette longueur comptée à partir du point de contact, son extrémité sera sur la directrice; donc :

Si, dans une conique, on joint le point où la tangente rencontre la directrice, au foyer, cette droite sera perpendiculaire au rayon vecteur.

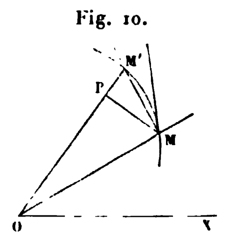
D'où une construction de la tangente aux coniques.

XVII. — Tangentes en coordonnées polaires.

Lorsqu'une courbe est donnée en coordonnées polaires, il est commode de déterminer sa tangente au moyen de l'angle qu'elle fait avec le rayon vecteur.

Soient (*fig.* 10) r, θ les coordonnées du point M par rap-

Fig. 10.



port au pôle O et à l'axe polaire OX. Menons le rayon $\mathrm{OM}=r$ et le rayon voisin $\mathrm{OM}'=r+\Delta r$; du point M abaissons MP perpendiculaire sur OM'; nous aurons

$$\operatorname{tang}\mathrm{MM'P}=\frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{M'P}}.$$

A la limite, MM′P se réduit à l'angle cherché V; PM est égal à

$$\text{OM}\sin\text{POM} = r\sin d\theta \quad \text{ou} \quad r\,d\theta,$$

en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier; M′P est la différence entre

$$r + \Delta r = \text{OM}' \quad \text{et} \quad \text{OP} = r\cos d\theta,$$

ou, en négligeant les termes d'ordre supérieur, la différence entre $r + dr$ et r, c'est-à-dire dr; on a donc

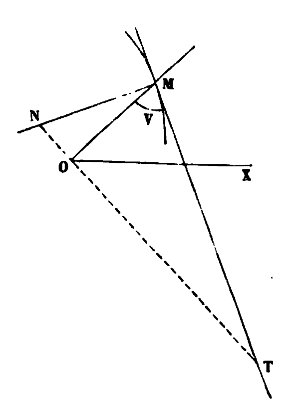
$$\tan\text{g}\,\text{V} = \lim \frac{r\,d\theta}{dr},$$

quand $d\theta = 0$; mais la limite de $r\dfrac{d\theta}{dr}$ est précisément $r\dfrac{d\theta}{dr}$ où $d\theta$ est quelconque, ainsi

$$(1) \qquad \text{tang}\,\text{V} = \frac{r\,d\theta}{dr}.$$

Considérons (*fig.* 11) la tangente MT en M à une courbe

Fig. 11.



rapportée à des coordonnées polaires, et la normale MN; par le pôle O, menons NT perpendiculaire au rayon vecteur, $\text{OM} = r$, du point M; posons

$$\text{ON} = \text{S}_n, \qquad \text{OT} = \text{S}_t, \qquad \text{MN} = \text{N}, \qquad \text{MT} = \text{T};$$

les lignes S_n, S_t, N, T sont appelées la *sous-normale,* la *sous-tangente,* la *normale* et la *tangente polaires.* On trouve, sans difficulté,

$$S_n = \frac{r}{\tang V} = \frac{dr}{d\theta}, \qquad S_t = r \tang V = \frac{r^2 d\theta}{dr},$$

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \qquad T = \sqrt{r^2 + r^4\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}.$$

Toutes les courbes qui ont même sous-normale pour un même angle polaire θ ont même $\frac{dr}{d\theta}$; si donc on appelle r et r' les rayons vecteurs de deux de ces courbes, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr'}{d\theta}$$

ou

$$r = r' + \text{const.}$$

On obtient donc l'une des courbes en prolongeant les rayons vecteurs de l'autre d'une quantité constante. L'une des courbes est dite la *conchoïde* de l'autre; on voit que, pour mener la normale à la conchoïde d'une courbe, il suffit de savoir mener la normale à cette courbe, et de construire sa sous-normale; on aura ainsi celle de la conchoïde et, par suite, sa normale.

Il ne faut pas confondre la conchoïde d'une courbe avec la courbe *parallèle* à celle-ci. Une courbe *parallèle* à une autre s'obtient en prolongeant les normales à celle-ci d'une quantité constante. Le théorème de Poinsot donne tout de suite la normale à la courbe parallèle; si l'on appelle p la quantité dont on a prolongé les normales,

$$f = p - \text{const.} = 0$$

est l'équation de la courbe parallèle; sa normale est la résultante d'une seule droite égale à $\frac{\partial f}{\partial p} = 1$, portée sur la normale à la courbe proposée : elle a donc même normale que la courbe proposée.

Si dans une courbe la sous-normale K est constante, on a

$$\frac{dr}{d\theta} = \mathrm{K}, \qquad r = \mathrm{K}\theta + \text{const.};$$

la courbe est une sorte de spirale à laquelle on donne le nom de *spirale d'Archimède* ou de *Conon*. Les conchoïdes de ces spirales sont encore des spirales égales, comme on peut s'en assurer par un changement d'axe polaire.

Soient r et r' les rayons de deux courbes qui, pour un même θ, ont même sous-tangente; on aura

$$\frac{r^2 d\theta}{dr} = \frac{r'^2 d\theta}{dr'} \quad \text{ou} \quad \frac{dr}{r^2} = \frac{dr'}{r'^2};$$

on en conclut

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \text{const.}$$

Si l'on cherche les courbes dans lesquelles la sous-tangente est constante et égale à K, on a

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = \mathrm{K}$$

ou bien

$$\frac{1}{r} = \text{const.} + \mathrm{K}\theta.$$

Ces courbes portent le nom de *spirales hyperboliques;* elles se ramènent à la forme $r\theta = \text{const.}$ par un changement d'axe polaire.

Parmi les courbes dont il est intéressant de trouver la tangente en coordonnées polaires, se trouve la courbe transcendante appelée *spirale logarithmique;* son équation s'obtient en écrivant qu'elle coupe tous les rayons vecteurs sous un angle constant; tang V est alors constant, et l'on a

$$\frac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tang} \mathrm{V}$$

ou

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \cot \mathrm{V};$$

on en déduit

$$\log r = \theta \cot V$$

sans ajouter de constante, ce qui revient à faire tourner l'axe polaire. L'équation précédente revient à

$$r = e^{\theta \cot V}.$$

M. Pillet a reconnu que les volutes de plusieurs chapiteaux ioniens et corinthiens étaient formées de spirales logarithmiques. On voit facilement que, quand une spirale de cette nature tourne autour de son pôle, elle reste homothétique à elle-même.

La spirale logarithmique tourne indéfiniment autour du pôle, qui est pour elle un point asymptote.

L'équation de la tangente à une courbe en coordonnées polaires est celle d'une droite

$$(1) \qquad \frac{1}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta,$$

qui passe par les points R, Θ et $R + dR$, $\Theta + d\Theta$ infiniment voisins sur la courbe; les coefficients A et B seront alors déterminés par les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{R} = A\cos\Theta + B\sin\Theta, \\ \dfrac{1}{R} + d\dfrac{1}{R} = A\cos(\Theta + d\Theta) + B\sin(\Theta + d\Theta); \end{cases}$$

on peut remplacer la seconde par

$$(3) \qquad d\frac{1}{R} = -A\sin\Theta\, d\Theta + B\cos\Theta\, d\Theta;$$

l'élimination de A, B entre (1), (2), (3) donne l'équation de la tangente

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos(\Theta - \theta) - \frac{d\frac{1}{R}}{d\Theta}\sin(\Theta - \theta).$$

XVIII. — Des podaires.

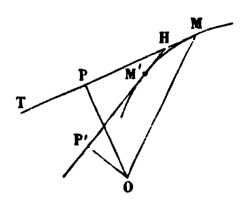
Si d'un point O on abaisse des perpendiculaires sur toutes les tangentes à une courbe, le lieu des pieds P de ces perpendiculaires est la podaire du point O par rapport à la courbe en question.

Soit (*fig.* 12)

$$y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha) \tag{1}$$

l'équation d'une tangente à la courbe proposée au point M,

Fig. 12.



(α, β); le point P sera donné par l'équation (1) et par la suivante (on suppose le point O à l'origine des coordonnées)

$$y=-\frac{d\alpha}{d\beta}x; \tag{2}$$

si, entre (1) et (2), on élimine $\frac{d\alpha}{d\beta}$, on a

$$y(y-\beta)=-x(x-\alpha)$$

ou

$$x^2+y^2-\beta y-\alpha x=0; \tag{3}$$

c'est l'équation d'un cercle passant par O, P, M et ayant son centre au milieu de OM. Cherchons la tangente en P à la podaire; son équation est

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x); \tag{4}$$

or de (3) on tire

$$2x\,dx + 2y\,dy - \beta\,dy - \alpha\,dx - y\,d\beta - x\,d\alpha = 0$$

ou, en vertu de (2),

$$dx(2x-\alpha) + dy(2y-\beta) = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-\alpha}{2y-\beta}.$$

L'équation (4) devient alors

$$Y - y = -\frac{2x-\alpha}{2y-\beta}(X-x);$$

mais $-\frac{2x-\alpha}{2y-\beta}$ est le coefficient angulaire de la tangente au cercle (3) menée par le point M; donc la normale à la podaire d'une courbe passe par le milieu du rayon vecteur OM de cette courbe.

On peut le démontrer par des considérations synthétiques, en observant que, si l'on considère une tangente M′ P′ infiniment voisine de MP et le point P′ de la podaire infiniment voisin de P sur cette tangente, les points P et P′ seront sur un cercle décrit sur OH comme diamètre; or, la droite PP′ étant à la limite la tangente à la conchoïde et au cercle, le théorème se trouve démontré, parce que la normale commune passera par le milieu de OH qui se confondra avec OM.

On voit que la podaire touche la courbe aux points M, tels que OM soit normale à la courbe.

Si l'on prend le point O par pôle et si l'on appelle r, θ les coordonnées polaires de M, et r_1 et θ_1 celles de P, on aura

$$r_1 N = r^2,$$

d'où

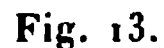
$$r_1 = r\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

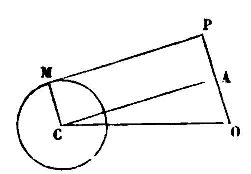
$$\theta_1 = \theta - \text{arc tang}\frac{dr}{r\,d\theta}.$$

XIX. — Énumération de quelques podaires.

1° *Podaire du cercle.* — La podaire du cercle est une *conchoïde* de cercle (p. 34).

En effet, soient (*fig.* 13) C le cercle, O un pôle fixe, MP une


Fig. 13.



tangente au cercle, OP une perpendiculaire à cette tangente; menons CA parallèle à MP; le lieu du point A est un cercle décrit sur OC comme diamètre; AP étant constant et égal au rayon du cercle C, on voit que le lieu du point P est à la fois la podaire du cercle C et la conchoïde du cercle décrit sur CO comme diamètre.

Quand le point O est sur le cercle C, la podaire prend le nom de *cardioïde*.

L'équation polaire du cercle décrit sur $CO = a$ comme diamètre étant $r = a\cos\theta$, celle de la conchoïde sera

$$r = a\cos\theta + \text{const.};$$

ce sera aussi celle d'une podaire quelconque de cercle.

2° Les podaires de coniques seront étudiées plus loin parmi les courbes *anallagmatiques*.

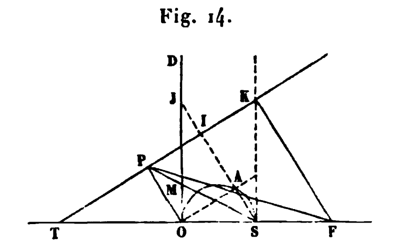
3° La podaire d'une parabole, en prenant pour pôle le pied de la directrice sur l'axe, est ce que l'on appelle une *strophoïde*.

La strophoïde présente un mode de génération qu'il est bon de connaître.

Soient (*fig.* 14) F le foyer, S le sommet d'une parabole, O le pied de la directrice, PT une tangente, P le pied de la perpendiculaire menée de O sur cette tangente. Si du foyer F

on abaisse FK perpendiculaire sur la tangente, K sera sur la tangente SK au sommet. Soient M le point où SP rencontre la directrice, I le milieu de PK; les angles FKS, KSI, ISP,

Fig. 14.



SPO sont égaux; or MOP = ISK, donc ISK = MPO, donc MO = MP, et l'on a le mode de génération suivant de la strophoïde :

Prendre un point fixe S et une droite fixe OD, mener le rayon vecteur SMP, prendre MP = MO; le lieu du point P est la strophoïde. La droite OP est un diamètre de la courbe, ainsi que l'on s'en assure en cherchant l'équation de la strophoïde engendrée comme il vient d'être dit.

En prenant OT pour axe des x, OD pour axe des y et en faisant OS $= a$, on a, pour équation de la strophoïde,

$$xy^2 + x^3 + a(x^2 - y^2) = 0.$$

Les cercles ayant leur centre sur la parabole et passant par le pied O de la directrice sont tangents à la strophoïde. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition.

4° La podaire de la parabole, quand on prend le sommet pour pôle, est une *cissoïde;* ainsi le lieu du point I est une cissoïde. On peut donner de la cissoïde le mode de génération suivant, imaginé par Dioclès, inventeur de cette courbe.

Si l'on mène OA parallèle à la tangente KT à la parabole, le lieu du point A sera le cercle décrit sur OS comme diamètre. Les triangles JAO et IKS sont égaux; donc IS = JA.

On peut, par suite, pour engendrer la cissoïde tracer un cercle, mener les rayons vecteurs issus de S, mener la tangente

au point O diamétralement opposé de S, prendre JI = SA; le lieu des points I est la cissoïde.

En prenant SK pour axe des y, SO pour axe des x et en posant OS = a, l'équation de la cissoïde est

$$(x^2+y^2+ax)x-a(x^2+y^2)=0.$$

5° La podaire de l'hyperbole équilatère par rapport à son sommet est une *lemniscate de Bernoulli*. Cette courbe en coordonnées bipolaires a pour équation

$$uv=c^2,$$

c désignant la demi-distance des pôles. Ce résultat est facile à vérifier par l'Analyse.

Rappelons enfin que la droite est la podaire d'une parabole par rapport à son foyer, et que le cercle est une podaire de conique à centre relativement à l'un de ses foyers.

XX. — Transformation par rayons vecteurs réciproques.

Quand deux courbes en coordonnées polaires, pour une même valeur de l'angle polaire, sont telles que le produit de leurs rayons vecteurs reste constant, on dit qu'elles sont *transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques*.

$$r=f(\theta),\qquad r'=\frac{k^2}{f(\theta)}$$

sont les équations polaires de deux courbes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, et l'on a $rr'=k^2$; k^2 est le *module de la transformation*, il peut être négatif.

On reconnaît aisément que la transformée d'une droite est un cercle, et que la transformée d'un cercle est un cercle qui se réduit à une droite, si le pôle est sur le cercle. En effet, l'équation du cercle est

$$r^2+r(a\cos\theta+b\sin\theta)+c=0,$$

et, en changeant r en $\frac{k^2}{r}$, cette équation conserve sa forme; cependant, si $c = 0$, elle prend la forme

$$r = \frac{-k^2}{a\cos\theta + b\sin\theta},$$

équation d'une droite.

Les tangentes aux points correspondants de deux courbes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques font des angles égaux avec le rayon vecteur commun; en effet, pour l'une des courbes, on a

$$\operatorname{tang} V = r\frac{d\theta}{dr},$$

V désignant l'angle que le rayon vecteur r fait avec la tangente et θ l'angle polaire. Pour l'autre, en appelant V′ l'angle que fait le rayon vecteur r' avec la tangente, on a

$$\operatorname{tang} V' = r'\frac{d\theta}{dr'};$$

or

$$r' = \frac{k^2}{r}, \qquad dr' = -\frac{k^2}{r^2}\,dr.$$

On en conclut

$$\operatorname{tang} V' = -r\frac{d\theta}{dr};$$

donc V et V′ sont supplémentaires : en d'autres termes, les tangentes aux deux courbes font des angles égaux avec le rayon vecteur, mais elles ne sont pas parallèles; elles sont *antiparallèles*.

Il résulte de là que *deux courbes et leurs transformées par rayons vecteurs réciproques se coupent sous le même angle*, et cet angle est la différence des angles que les courbes ou leurs transformées font avec le rayon vecteur du point où elles se croisent.

Par suite, *si l'on sait construire la tangente à une courbe, on saura aussi construire la tangente à sa transformée.*

Nous remarquerons, en terminant, que la transformée par rayons vecteurs réciproques d'une conchoïde de cercle est une conique ayant pour foyer le pôle; en effet, la conchoïde du cercle a pour équations, quand on prend le pôle sur le cercle,

$$r = a + 2R\cos\theta,$$

R désignant le rayon du cercle et a une constante; la transformée par rayons vecteurs réciproques a pour équation

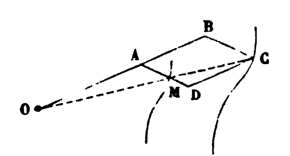
$$r = \frac{k^2}{a + 2R\cos\theta};$$

c'est bien l'équation générale des coniques rapportées à leur axe et à leur foyer.

XXI. — Description de l'appareil Peaucellier et de ses dérivés.

C'est ici l'occasion de parler d'une série d'appareils à tiges, qui permettent de tracer les courbes d'un mouvement continu. Le plus ancien de ces appareils, et le plus connu, est le *pantographe* qui permet de construire une courbe semblable à une courbe donnée : O est un point fixe (*fig.* 15),

Fig. 15.



OAB une tige capable de tourner autour de O; AD, DC, CB sont trois tiges formant avec AB un parallélogramme articulé en A, B, C, D.

Si l'on joint OC, on aura $\frac{AM}{BC} = \frac{OA}{OB}$; donc le point où la droite idéale OC rencontre AD est fixe sur la tige AD, et ce point décrit une figure semblable à celle que décrit le point C quand on fait mouvoir tout l'appareil autour du point O. Si

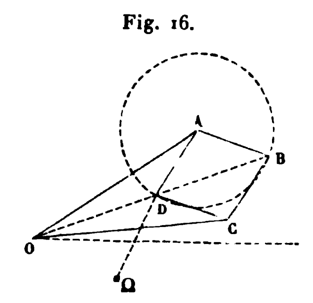
un crayon est placé en M et si avec le point C on suit un contour donné, le crayon décrit la figure semblable, et il est clair que O est centre de similitude.

Le parallélogramme de Watt est connu du lecteur, nous le citons simplement pour mémoire.

L'appareil Peaucellier, ou *inverseur Peaucellier*, permet de construire d'un trait continu la figure transformée d'une autre par rayons vecteurs réciproques.

L'inverseur Peaucellier (*fig.* 16) se compose d'un lo-

Fig. 16.



sange ABCD articulé en chacun de ses sommets; deux tiges égales OA et OC sont articulées en A, en C et en O qui est un point fixe. Quand le point D décrit une ligne, le point B décrit sa transformée par rayons vecteurs réciproques; le pôle est en O, le module est égal à $\overline{OA}^2 - \overline{AD}^2$.

En effet, $OB \times OD$ est égal à la puissance du point O par rapport au cercle décrit de A comme centre avec AD pour rayon.

Voici quelques applications de l'inverseur Peaucellier :

Si l'on fait décrire au point D un cercle, en articulant en D une tige DΩ capable de tourner autour du point Ω et telle que sa longueur $\Omega D = O\Omega$, le point D décrira un cercle passant en O, et alors B décrira une droite; l'appareil ainsi constitué résout le problème que Watt s'était proposé : transformer un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne.

Supposons maintenant que l'on fixe le point D; on aura

toujours $OD \times OB = \text{const.} = k^2$; et, entre les rayons vecteurs $DB = \rho$, $DO = \rho'$, on aura la relation

$$\rho' \times (\rho + \rho') = k^2 \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{k^2 - \rho'^2}{\rho'}.$$

Si $\rho' = R\cos\theta$, c'est-à-dire si l'on assujettit le point O à décrire un cercle passant en D au moyen d'une tige ΩO articulée en Ω et en O, le point Ω étant fixe, on aura

$$\rho = \frac{k^2 - R^2\cos^2\omega}{R\cos\omega}.$$

Supposons maintenant que O soit le point B d'un nouvel inverseur de Peaucellier; le point D de ce nouvel inverseur décrira la courbe transformée par rayons vecteurs réciproques de celle-ci, ou

$$\rho = \frac{k'^2 R\cos\omega}{k^2 - R^2\cos^2\omega}$$

ou, en coordonnées rectilignes,

$$k^2(x^2+y^2) - R^2x^2 = k'^2Rx$$

ou

$$k^2y^2 + (k^2 - R^2)x^2 - k'^2Rx = 0;$$

c'est l'équation d'une conique rapportée à son sommet et tout à fait quelconque : parabole si $k^2 = R^2$, ellipse si $k^2 > R^2$, hyperbole si $k^2 < R^2$. Cette solution pour le tracé des coniques est de M. Sylvester.

L'inverseur Peaucellier, un peu modifié, permet de tracer les conchoïdes d'un trait continu : adjoignons (*fig.* 17) à cet inverseur deux tiges KO et KB égales; abaissons, du point D, DH perpendiculaire sur OK, le point H sera fixe; donc, si l'on fait mouvoir la figure, D restera sur une perpendiculaire à OK menée par le point fixe H sur la tige OK. En effet, soient

$$OD = \rho, \qquad OB = \rho', \qquad \rho\rho' = k^2, \qquad OKB = \alpha;$$

on aura

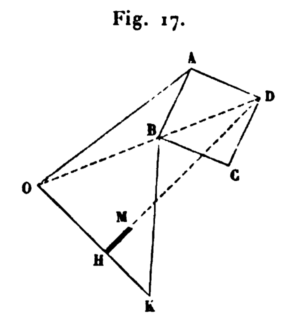
$$OH = \rho\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{k^2}{\rho'}\sin\frac{\alpha}{2} = 2k^2 : OK = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

Si alors on fixe le point D et que l'on imagine une tige HM soudée perpendiculairement à HK, le prolongement de cette tige passera par le pôle D; si donc H décrit une courbe, M décrira sa conchoïde.

Si l'on fait décrire au point M un cercle passant en D au

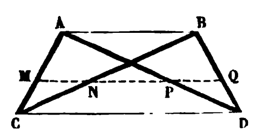
Fig. 17.



moyen d'une tige fixée en un point Ω, tel que $\Omega M = \Omega D$, H décrira une conchoïde de cercle $\rho = R\cos\omega + a$; et, en appliquant en H l'un des points décrivants d'un inverseur Peaucellier, l'autre point décrivant tracera la courbe $\rho = \frac{k^2}{R\cos\omega + a}$, qui est une conique.

Voici un autre inverseur un peu plus simple que celui de Peaucellier. Considérons (*fig.* 18) un trapèze isoscèle et ses

Fig. 18.



diagonales; supprimons les bases et formons avec la figure restante un système articulé en A, B, C, D. Si l'on prend M et N fixes sur les tiges AC et IB, et tels que $\frac{MC}{NC} = \frac{AC}{BC}$, le point fixe Q sur le prolongement de MN sera tel que $MN \times NQ = \text{const.}$; si l'on fixe N, les points M et Q décri-

ront des figures transformées par rayons vecteurs réciproques.

En effet,

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CN}{CB}, \qquad \frac{NQ}{CD} = \frac{NB}{CB},$$

donc

$$MN - NQ = \text{const.} \times AB \times CD;$$

mais, le quadrilatère ABCD étant inscriptible,

$$AB \times CD + AC \times BD$$

est égal à $AD \times CB$; donc $AB \times CD$ est constant et, par suite, $MN \times NQ$ l'est aussi. C. Q. F. D.

XXII. — Théorie des enveloppes.

Considérons une équation renfermant, outre les coordonnées x, y d'un point variable, un paramètre a,

$$f(x, y, a) = 0.$$

Pour chaque valeur de a, cette équation représentera une courbe; toutes les courbes obtenues ainsi constituent ce que l'on appelle une *famille*.

Étudions les deux courbes infiniment voisines de la famille, obtenues en donnant au paramètre les valeurs a et $a + da$, savoir

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a + da) = 0,$$

ces deux courbes se couperont en général en plusieurs points. Si l'on considère l'un d'eux, on peut se proposer de trouver les coordonnées de sa position limite quand da tend vers zéro. Cette position limite est une des *intersections successives* des courbes de la famille.

La courbe dont l'équation est

$$\frac{f(x, y, a + da) - f(x, y, a)}{da} = 0$$

ou, en désignant par θ un nombre compris entre o et 1,

$$f'(x, y, a + \theta\, da) = 0,$$

f' désignant une dérivée relative à a, passe par les points communs aux courbes (1). elle peut remplacer (2) ; à la limite, les points cherchés se trouvent donc à l'intersection des courbes

$$(2) \qquad f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Le lieu des points limites en question ou, si l'on veut, le lieu des intersections successives des courbes de la famille s'obtiendra en éliminant a entre les deux équations (2). On a donné à ce lieu le nom d'*enveloppe* des courbes de la famille ; celles-ci portent le nom d'*enveloppées*.

Théorème I. — *L'enveloppe d'une famille de courbes est tangente à toutes les enveloppées.*

En effet, soit

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0$$

l'équation d'une famille de courbes ; nous venons de voir que, pour en trouver l'enveloppe, il faut éliminer a entre cette équation (1) et sa dérivée relative à a

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

l'équation (1) peut être considérée comme celle de l'enveloppe, si l'on y suppose a non plus constant, mais égal à la fonction de x et de y que l'on obtiendrait en résolvant l'équation (2) par rapport à a.

Maintenant cherchons le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe et à l'enveloppée au point commun x, y. A cet effet, différentions (1), en considérant a comme une constante ; nous aurons

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où l'on déduira le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de l'enveloppée. Différentions au contraire la même équation, en supposant a fonction de x et de y et déduit de (2); nous aurons

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0;$$

mais, en vertu de (2), cette équation se réduit à

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Cette équation ne diffère de (3) que parce que a dans (3) représente une constante, et que dans (5) il représente une certaine fonction de x et y; mais, au point (x, y) commun à l'enveloppe et à l'enveloppée, la constante et la fonction ont la même valeur; donc (3) et (5) fournissent la même valeur de $\frac{dy}{dx}$, et par suite l'enveloppe et l'enveloppée ont même tangente. C.Q.F.D.

On voit que ce théorème tombera en défaut quand on aura à la fois $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire quand l'enveloppe sera un lieu de points singuliers; mais alors on ne conserve pas généralement la dénomination d'enveloppe au lieu des intersections successives des courbes de la famille.

THÉORÈME II. — *Si l'on considère une famille de courbes, toute courbe tangente à chaque courbe de la famille est leur enveloppe.*

En effet, soit $f(x, y, a) = 0$ l'équation d'une famille de courbes; si une courbe C ayant pour équation $F(x, y) = 0$ leur est tangente, on pourra toujours déterminer a en fonction de x et de y, de telle sorte que

$$f(x, y, a) = F(x, y),$$

quels que soient x et y. Alors

$$f(x, y, a) = 0$$

pourra représenter la courbe C tangente à toutes les courbes de la famille. Tirons $\frac{dy}{dx}$ de cette équation, en supposant a variable; nous aurons

$$\text{(P)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

et, en supposant a constant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Si les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont égales pour une même valeur de x et y, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

car $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx}$ ne saurait être nul, sans quoi a serait constant.

Or les points où l'on a à la fois $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ appartiennent à l'enveloppe. C.Q.F.D.

On voit également que si $F(x, y) = 0$ représente un lieu de points singuliers, l'équation (P) devra être satisfaite en supposant $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ et $f = 0$, c'est-à-dire en supposant $f = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. Un lieu de points singuliers d'une famille de courbes fait donc en général partie de l'enveloppe de cette famille.

XXIII. — Recherche de quelques enveloppes.

Comme application de la théorie que nous venons de développer, cherchons d'abord l'enveloppe des cercles représentés par l'équation

$$(1) \qquad (x-a)^2 + y^2 = R^2.$$

En différentiant par rapport à a, on trouve

$$2(x-a)=0 \quad \text{ou} \quad x=a,$$

et l'élimination de a donne

$$y^2=R^2 \quad \text{ou} \quad y=\pm R,$$

équation qui représente deux droites, résultat évident *a priori*. Maintenant résolvons encore le même problème, mais en écrivant l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad a=x+\sqrt{R^2-y^2}.$$

La différentiation relative à a donne $1=0$, résultat absurde, et il semble qu'il n'y ait pas d'enveloppe. Pour peu que l'on réfléchisse, on s'apercevra que les résultats, en apparence contradictoires, que nous venons de rencontrer, ne s'appliquent pas en réalité à la même question. En effet, l'équation (2) représente non pas les cercles (1), mais une série de demi-cercles qui ne se coupent pas et qui n'ont pas d'enveloppe. Les demi-cercles

$$a=x-\sqrt{R^2-y^2}$$

n'en ont pas non plus. Mais les cercles complets

$$a=x\pm\sqrt{R^2-y^2}$$

ont une enveloppe, que l'on obtiendra, non pas en différentiant par rapport à a l'équation précédente, car celle-ci est en réalité l'ensemble de deux équations, mais en procédant de la manière suivante. Donnons à a les valeurs a et $a+h$, et considérons les demi-cercles

$$a=x-\sqrt{R^2-y^2},$$
$$a+h=x+\sqrt{R^2-y^2},$$

ils se coupent au point donné par les équations

$$a=x-\sqrt{R^2-y^2}, \qquad h=2\sqrt{R^2-y^2}$$

ou, à la limite pour $h=0$,

$$a=x-\sqrt{R^2-y^2}, \qquad 0=\sqrt{R^2-y^2};$$

et le lieu des intersections sera donné par l'équation

$$o = \sqrt{R^2 - y^2},$$

comme tout à l'heure.

En général, les familles de courbes dans lesquelles le paramètre entre au premier degré n'ont pas d'enveloppe ; on sait, en effet, que l'équation

$$\varphi(x, y) + a\psi(x, y) = o$$

représente un faisceau de courbes passant par des points fixes, et que

$$\varphi(x, y) = a$$

représente des courbes qui ne sauraient avoir de points communs et par suite d'enveloppe. D'ailleurs la différentiation relative à a donne, dans le premier cas, $\psi(x, y) = o$ et, dans le second, $o = 1$.

Problème. — *De tous les points d'une parabole on abaisse des perpendiculaires sur l'axe et sur la tangente au sommet ; trouver l'enveloppe de la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires.*

L'équation de la parabole est

$$y^2 = 2px :$$

les pieds des perpendiculaires en question ont donc pour coordonnées o, y et $\frac{y^2}{2p}, o$; l'équation de la droite dont on cherche l'enveloppe est

$$\frac{2pX}{y^2} + \frac{Y}{y} = 1$$

ou

$$2pX + Yy = y^2 ;$$

en éliminant y entre cette équation et sa dérivée

$$Y = 2y,$$

on a

$$Y^2 + 8pX = o ;$$

l'enveloppe cherchée est donc une autre parabole de paramètre quatre fois plus grand.

XXIV. — Sur quelques simplifications que peuvent présenter les calculs d'enveloppes.

Pour trouver l'enveloppe d'une famille de courbes

$$f(x, y, a) = 0, \tag{1}$$

on élimine a entre cette équation et

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0; \tag{2}$$

l'enveloppe peut donc être définie : *le lieu des points pour lesquels l'équation* (1) *a une racine double;* par suite, le lieu de ces points s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de l'équation (1) rendue homogène en remplaçant a par $\frac{a}{b}$. Soit

$$f(a, b, x, y) = 0$$

l'équation (1) rendue homogène; on pourra la remplacer par

$$a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} = 0, \tag{3}$$

et le système (1), (2) par le système (2), (3). Or, en combinant (2) et (3), on trouve $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$; donc *l'enveloppe d'une famille de courbes, contenant sous forme homogène les paramètres a, b,*

$$f(a, b) = 0,$$

s'obtient en éliminant a et b entre

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Ainsi l'enveloppe des paraboles du paragraphe précédent

$$2pX + Yy - y^2 = 0$$

pouvait s'obtenir de suite en égalant le discriminant $Y^2 + 8pX$ à zéro.

Il arrive souvent qu'au lieu de donner une famille de courbes au moyen d'une seule équation on la donne au moyen de plusieurs équations, telles que

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1(x, y, a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ \varphi_2(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0. \end{cases}$$

Les équations $\varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$ permettant d'exprimer a_2, $a_3, \ldots, a_n$ en fonction de a_1, par exemple, l'équation $\varphi_1 = 0$, dans laquelle $a_2, a_3, \ldots, a_n$ seront fonctions de a_1, représentera une famille de courbes; cela revient à dire que l'ensemble des équations (1) représente cette famille.

Pour avoir l'enveloppe, on différentiera les équations (1) et l'on aura

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a_1}\,da_1 + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial a_2}\,da_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial a_n}\,da_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial a_1}\,da_1 + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial a_2}\,da_2 + \ldots + \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial a_n}\,da_n = 0; \end{cases}$$

la première de ces équations peut être considérée comme la dérivée de la première équation (1), prise par rapport à a_1, à la condition de supposer $\dfrac{da_2}{da_1}, \ldots, \dfrac{da_n}{da_1}$ remplacés par leurs valeurs déduites des autres formules (2). Cela fait, il faudrait éliminer a_1 entre les premières équations (1) et (2), ce qui revient à éliminer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et leurs différentielles entre (1) et (2); or le résultat de l'élimination des différentielles est

$$(3)\qquad \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(a_1, a_2, \ldots, a_n)} = 0.$$

Donc, *pour trouver l'enveloppe d'une famille de courbes données par plusieurs équations, il faut éliminer les para-*

mètres variables entre les équations données et le déterminant fonctionnel de leurs premiers membres égalé à zéro.

Quand les variables a_1, a_2, ... entrent sous forme homogène et sont en nombre supérieur d'une unité au nombre des équations, on peut obtenir plus d'équations pour faire l'élimination; les nouvelles équations rentrent bien entendu dans les anciennes. Soit donc a_{n+1} une nouvelle variable introduite pour l'homogénéité; outre l'équation (3), on aura à considérer les équations (1), et l'on pourra les écrire

$$a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_2} + \ldots + a_{n+1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{n+1}} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_1 \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_1} + a_2 \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_2} + \ldots + a_{n+1} \frac{\partial \varphi_n}{\partial a_{n+1}} = 0;$$

or on en tire

$$\frac{a_1}{\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(a_2, \ldots, a_{n+1})}} = \frac{a_2}{\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(a_1, \ldots, a_{n+1})}} = \ldots.$$

L'un des dénominateurs étant nul en vertu de (3), les autres le sont donc aussi, ce qui peut être utile.

Problème I. — *Trouver l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires.*

L'équation de cette ligne rapportée aux deux droites sur lesquelles elle s'appuie est

$$(1) \qquad bx + ay = ab,$$

a et b désignant ses coordonnées à l'origine. Si l'on appelle l la longueur de la droite, on aura

$$(2) \qquad a^2 + b^2 = l^2;$$

l'enveloppe cherchée s'obtiendra en éliminant a et b entre (1), (2) et leur déterminant

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ y-b & x-a \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou} \quad ax - by = -b^2 + a^2;$$

de (1) et (3) on tire

$$(a^2+b^2)x = a^3 \quad \text{ou} \quad l^2x = a^3,$$
$$(a^2+b^2)y = -b^3 \quad \text{ou} \quad l^2y = -b^3$$

et par suite, en vertu de (2),

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

C'est aussi le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur la droite qui joint les pieds de ses coordonnées relatives à deux axes rectangulaires passant par le centre.

Problème II. — *Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire donnée, ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites.*

L'équation de ces ellipses est

$$a^2y^2+b^2x^2 = k^4,$$
$$a^2b^2 = k^4.$$

Pour trouver l'enveloppe, il faut éliminer a^2, b^2 entre ces équations et l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant des fonctions $a^2y^2+b^2x^2$ et a^2b^2 pris par rapport à a^2 et b^2, ou

$$\begin{vmatrix} y^2 & x^2 \\ b^2 & a^2 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$a^2y^2-b^2x^2 = 0;$$

le résultat de l'élimination est

$$x^2y^2 = \frac{k^4}{4};$$

il donne les deux hyperboles

$$xy = \frac{k^2}{2}, \qquad xy = -\frac{k^2}{2}.$$

Remarque. — L'enveloppe de $X - 2\lambda Y + \lambda^2 Z = 0$, où X, Y, Z sont des fonctions de x, y et où λ est un paramètre

variable, peut s'obtenir en écrivant que cette équation a des racines égales; cette enveloppe a donc pour équation

$$(a)\qquad Y^2 - XZ = 0.$$

En particulier, on voit que, si X, Y, Z sont des coordonnées trilinéaires, l'équation proposée est celle d'une tangente quelconque à la conique (a).

XXV. — Des coordonnées tangentielles.

Si l'on considère une droite

$$(1)\qquad x\xi + y\eta = 1,$$

dont les coordonnées à l'origine sont $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$, cette droite sera parfaitement déterminée quand on donnera ξ et η; ces quantités portent le nom de *coordonnées tangentielles* de la droite et l'on dit que les coordonnées x, y d'un point sont des coordonnées *cartésiennes*. Si maintenant on établit entre ξ et η une relation telle que

$$(2)\qquad f(\xi, \eta) = 0,$$

cette droite enveloppera une certaine courbe dont (2) sera dite l'*équation tangentielle,* et (1) sera l'équation en coordonnées ordinaires d'une de ses tangentes ayant pour coordonnées ξ, η.

Dans ce système de coordonnées, un point, comme nous allons le voir, est représenté par une équation, et, pour avoir l'équation d'une courbe quelconque, il suffit d'exprimer que la droite (1) est une tangente.

Équations du premier degré. — *Toute équation du premier degré représente un point.*

En effet, l'équation

$$(2\ bis)\qquad a\xi + b\eta + c = 0$$

établit une relation du premier degré entre ξ et η. L'équa-

tion (1) ne dépend plus alors que d'un seul paramètre entrant au premier degré et, par suite, représente un faisceau de droites passant par un point fixe qui est leur enveloppe. Effectuons les calculs : on tire de l'équation (2 *bis*)

$$\xi = -\frac{c + b\eta}{a}$$

et, en portant cette valeur de ξ dans (1),

$$-\frac{c + b\eta}{a} x + \eta y = 1;$$

c'est l'équation d'une droite passant par l'intersection des deux droites

$$\frac{c}{a} x + 1 = 0, \quad \frac{b}{a} x - y = 0$$

ou bien

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{-1}{c}.$$

Le point représenté par (2 *bis*) a donc pour coordonnées $-\frac{a}{c}$ et $-\frac{b}{c}$. Réciproquement, si l'on veut obtenir l'équation tangentielle du point dont les coordonnées sont x_0 et y_0, il faudra écrire que la droite (1) passe par ce point; cette équation sera

$$x_0\xi + y_0\eta = 1.$$

La droite dont les coordonnées sont o et ξ est parallèle à l'axe des y; la droite dont les coordonnées sont o et o est la droite de l'infini.

L'équation $a\xi = 1$ représente un point dont l'ordonnée est nulle : il est par suite situé sur l'axe des x; l'équation const. $= 0$ représente l'origine des coordonnées;

$$a\xi + b\eta = 0$$

représenterait au contraire un point à l'infini.

Équations du second degré. — *Une équation du second degré représente une conique.*

En effet, supposons l'équation suivante du second degré

$$(2) \qquad f(\xi, \eta) = 0;$$

pour obtenir l'équation de la courbe en coordonnées ordinaires, il faudra chercher l'enveloppe de (1), ce qui se fera en égalant à zéro le déterminant de (1) et (2) et en éliminant ξ, η entre (1), (2) et l'équation ainsi obtenue; cette équation est

$$x\frac{\partial f}{\partial \eta} - y\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$$

ou bien

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \eta},$$

et, en supposant que l'on rende (1) et (2) homogènes par l'introduction des nouvelles variables z et ζ,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}}{x\xi + y\eta} = -\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Si l'on égale ces rapports à ρ, on a

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \rho x, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \rho y, \qquad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = -\rho z.$$

En éliminant ρ, ξ, η, ζ entre ces équations et (1), on en déduit une équation du second degré. Soit

$$f(\xi, \eta) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + 2d\xi\zeta + 2e\eta\zeta + f\zeta^2;$$

cette équation sera

$$\begin{vmatrix} a & b & d & x \\ b & c & e & y \\ d & e & f & -1 \\ x & y & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, l'équation tangentielle de la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0$$

s'obtiendra en écrivant que la droite (1) l'enveloppe ou la touche; la condition pour qu'il en soit ainsi est (p. 11)

$$\begin{vmatrix} A & B & D & \xi \\ B & C & E & \eta \\ D & E & F & -1 \\ \xi & \eta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On remarquera l'analogie entre cette formule et la précédente, analogie qui se développera et s'expliquera plus loin.

Équations de degré supérieur. — Si l'équation $f(\xi, \eta) = 0$ est de degré supérieur, ou même transcendante, on obtiendra l'équation ordinaire de l'enveloppe en éliminant toujours ξ, η, ζ entre (1) et (3); mais l'équation résultante n'est pas d'un degré égal à celui de f.

XXVI. — Résolution de quelques problèmes.

Deux équations tangentielles, prises simultanément,

$$(1) \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0, \qquad \psi(\xi, \eta) = 0,$$

déterminent les coordonnées d'une droite, ou de plusieurs droites, dont les coordonnées sont les solutions communes à ces deux équations. Une droite (ξ, η), dont les coordonnées satisfont aux équations (1), est tangente à la fois aux deux courbes $\varphi = 0$, $\psi = 0$; c'est une tangente commune.

Lorsque les équations (1) sont du premier degré, leur solution commune (ξ, η) représente la droite qui unit les points $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Pour exprimer qu'une droite (ξ', η') touche une courbe $f(\xi, \eta) = 0$, il suffit d'exprimer que l'on a $f(\xi', \eta') = 0$; ξ, η sont les coordonnées d'une droite $x\xi + y\eta = 1$, qui, en vertu de $f(\xi, \eta) = 0$, enveloppe cette courbe.

Par exemple,

$$a\xi' + b\eta' + c = 0$$

exprime que la droite (ξ', η') passe par le point

$$a\xi + b\eta + c = 0.$$

Enfin il est bon d'observer que

$$\varphi(\xi, \eta) + \lambda\psi(\xi, \eta) = 0$$

est l'équation d'une série de courbes qui touchent une même droite tangente à $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Problème I. — *Trouver la distance d'un point à une droite.*

Soient ξ', η' les coordonnées de la droite, et

$$a\xi + b\eta + c = 0$$

l'équation du point. En coordonnées ordinaires ou cartésiennes, l'équation de la droite sera

$$\xi' x + \eta' y = 1,$$

les coordonnées du point seront $-\frac{a}{c}$, $-\frac{b}{c}$; la distance cherchée sera donc

$$\frac{\frac{a}{c}\xi' + \frac{b}{c}\eta' + 1}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}} \quad \text{ou} \quad \frac{a\xi' + b\eta' + c}{c\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}.$$

Problème II. — *Trouver la distance de deux points.* Soient

$$a\xi + b\eta + c = 0, \qquad a'\xi + b'\eta + c' = 0,$$

leurs équations tangentielles; leurs coordonnées cartésiennes seront

$$-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c} \quad \text{et} \quad -\frac{a'}{c'}, -\frac{b'}{c'}:$$

leur distance sera donc

$$\left[\left(\frac{a}{c} - \frac{a'}{c'}\right)^2 + \left(\frac{b}{c} - \frac{b'}{c'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(ac' - ca')^2 + (bc' - cb')^2}}{cc'}.$$

Problème III. — *Trouver l'équation du cercle ayant pour centre le point* $a\xi + b\eta + c = 0$, *et pour rayon* R.

Ce cercle est l'enveloppe d'une droite $\xi x + \eta y = 1$ située à la distance R du point en question et dont les coordonnées sont $-\frac{a}{c}$, $-\frac{b}{c}$; on a donc, en exprimant que la distance du point à la droite est R,

$$R^2 = \frac{(a\xi + b\eta + c)^2}{c^2(\xi^2 + \eta^2)}.$$

Cette équation est de la forme

$$\xi^2 + \eta^2 = (A\xi - B\eta + C)^2.$$

XXVII. — Recherche des points de contact d'une courbe avec ses tangentes, etc.

Nous avons vu plus haut que les tangentes communes à deux courbes

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0,$$

données en coordonnées tangentielles, avaient pour coordonnées les solutions communes à ces deux équations; il en résulte que, si elles sont de degrés m et n, le nombre des tangentes communes sera mn. Si l'on convient d'appeler *classe* d'une courbe le degré de son équation tangentielle, on voit que deux courbes de classes m et n ont mn tangentes communes.

Nous allons voir qu'une courbe de degré m est en général de la classe $m(m-1)$; le nombre des tangentes communes à deux courbes de degrés m et n est donc $mn(m-1)(n-1)$.

Théorème. — *Si le degré de l'équation tangentielle d'une courbe est* n, *on peut lui mener par un point donné* n *tangentes; et,* vice versa, *si par un point donné on peut mener à une courbe* n *tangentes, le degré de son équation tangentielle sera* n *et l'on dira qu'elle est de* $n^{\text{ième}}$ *classe.*

En effet, le nombre des tangentes à la courbe $f(\xi, \eta) = 0$,

qui passent par un point $a\xi + b\eta + c = 0$, est égal au produit des degrés de ces deux équations ; il est donc égal au degré de f, et *vice versa*.

Il résulte de là que l'équation tangentielle d'une courbe de degré m est de degré $m(m-1)$, puisqu'on peut lui mener en général $m(m-1)$ tangentes par un point extérieur.

Problème I. — *Étant donnée une courbe en coordonnées tangentielles*

$$f(\xi, \eta) = 0 \tag{1}$$

et les coordonnées ξ, η *d'une de ses tangentes, trouver l'équation du point de contact de cette tangente.*

L'équation du point de contact est celle d'un point qui appartient à deux tangentes infiniment voisines, ξ, η et $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$; l'équation suivante

$$a\Xi + bH + c = 0$$

du point en question, où Ξ, H sont les coordonnées courantes, devra donc être satisfaite pour $\Xi = \xi$, $H = \eta$, et pour

$$\Xi = \xi + d\xi \quad \text{et} \quad H = \eta + d\eta ;$$

on doit donc avoir

$$a\xi + b\eta + c = 0,$$
$$a\,d\xi + b\,d\eta = 0 ;$$

d'où l'on conclut, en éliminant a, b, c,

$$(\Xi - \xi)d\eta - (H - \eta)d\xi = 0 \quad \text{ou} \quad H - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(\Xi - \xi). \tag{2}$$

Telle est l'équation du point de contact, analogue à celle de la tangente en coordonnées ordinaires. L'équation (1) différentiée donne

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\,d\xi + \frac{\partial f}{\partial \eta}\,d\eta = 0 ; \tag{3}$$

et, en éliminant $d\xi$, $d\eta$ entre (2) et (3), on a l'équation d'un point de contact sous la forme

$$(\Xi - \xi)\frac{\partial f}{\partial \xi} + (\mathrm{H} - \eta)\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0.$$

Si l'on rend la fonction f homogène par l'introduction d'une nouvelle variable ζ, cette équation prend la forme

$$\Xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \mathrm{H}\frac{\partial f}{\partial \eta} - \left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = 0$$

ou

$$(4) \qquad \Xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \mathrm{H}\frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathrm{Z}\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0,$$

en observant que

$$\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0.$$

Problème II. — *Trouver l'intersection d'une droite avec une courbe donnée en coordonnées tangentielles.*

Reprenons les notations et les formules du problème précédent. Soient ξ_0, η_0 les coordonnées de la droite donnée. L'équation (4) est celle d'un point situé sur la courbe; pour exprimer qu'il contient la droite ξ_0, η_0, il faudra écrire que son équation est satisfaite par les coordonnées de la droite; on aura donc

$$(5) \qquad \xi_0\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta_0\frac{\partial f}{\partial \eta} + \zeta_0\frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0.$$

Cette équation, jointe à celle de la courbe, fera connaître les tangentes de la courbe aux points où la droite donnée la rencontre; cette équation (5) est de degré $m - 1$ si f est de degré m. Donc $m(m - 1)$ est le nombre de points communs à la courbe et à la droite.

Il résulte de là qu'une courbe de $m^{\text{ième}}$ classe est d'ordre $m(m - 1)$. Il y a là une sorte de paradoxe; en effet, une courbe de degré $m(m - 1)$ serait de la classe

$$[m(m - 1)][m(m - 1) - 1],$$

nombre supérieur à m. Il faut simplement conclure de là que

la courbe la plus générale de degré m n'est pas la courbe la plus générale de sa classe, et que la courbe la plus générale de classe m n'est pas la courbe la plus générale de son degré.

XXVIII. — Coordonnées trilinéaires.

Si l'on exprime que la droite

$$(1) \qquad \xi x + \eta y + \zeta z = 0$$

touche la courbe

$$(2) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

donnée en coordonnées homogènes ou trilinéaires, on obtient une équation

$$(3) \qquad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

que l'on peut regarder comme l'*équation tangentielle homogène* de la courbe (2) ou comme son équation en *coordonnées trilinéaires tangentielles;* ou, comme l'on dit, en coordonnées *trilatères;* dans l'un ou l'autre cas, ξ, η, ζ seront les *coordonnées* de la droite (1).

Il va sans dire que, lorsque l'équation (3) est du premier degré, elle représente un point; quand elle est du second degré, elle représente une conique; quand elle est du degré n, elle représente une courbe de classe n.

Les coordonnées du point qui a pour équation

$$(4) \qquad l\xi + m\eta + n\zeta = 0$$

s'obtiendront en cherchant le point fixe par lequel passe la droite (1) quand l'équation (4) a lieu; en appelant x, y, z les coordonnées de ce point, on trouve

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}.$$

Soient toujours a, b, c les côtés, A, B, C les angles du triangle de référence et

$$(1) \qquad x\xi + y\eta + z\zeta = 0$$

l'équation d'une droite; en appelant s l'aire du triangle de référence, on a

$$ax + by + cz = 2s.$$

Appelons ξ_1, η_1, ζ_1 les distances des sommets A, B, C du triangle de référence à la droite (1), considérées comme positives ou négatives suivant qu'elles sont dirigées dans un sens ou en sens contraire.

Soient, en coordonnées ordinaires,

$$\begin{aligned} x &= X\cos\alpha + Y\sin\alpha - p = 0, \\ y &= X\cos\beta + Y\sin\beta - q = 0, \\ z &= X\cos\gamma + Y\sin\gamma - r = 0 \end{aligned}$$

les équations des côtés du triangle de référence; l'équation de (1) en coordonnées ordinaires sera

$$\begin{aligned} &X(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma) \\ &\quad + Y(\xi\sin\alpha + \eta\sin\beta + \zeta\sin\gamma) - (p\xi + q\eta + r\zeta) = 0, \end{aligned}$$

et l'on aura

$$\xi_1 = \frac{\xi(p\sin A + q\sin B + r\sin C)\operatorname{coséc} A}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta\cos A - 2\zeta\xi\cos B - 2\xi\eta\cos C}}.$$

Les coordonnées ξ, η, ζ sont donc proportionnelles à ξ_1, η_1, ζ_1 et pourront, si l'on veut, être regardées comme égales à ces quantités.

Or $(p\sin A + q\sin B + r\sin C)\operatorname{coséc} A$ est égal à

$$\frac{ap + bq + cr}{a},$$

c'est-à-dire à $\frac{2s}{a}$, en sorte que la formule précédente donne les relations

$$\frac{a\xi_1}{\xi} = \frac{b\eta_1}{\eta} = \frac{c\zeta_1}{\zeta} = \frac{2s}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta\cos A - 2\zeta\xi\cos B - 2\xi\eta\cos C}},$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} &(a\xi_1)^2 + (b\eta_1)^2 + (c\zeta_1)^2 \\ &\quad - 2bc\eta_1\zeta_1\cos A - 2ca\zeta_1\xi_1\cos B - 2ab\xi_1\eta_1\cos C = 4s^2, \end{aligned}$$

relation qui lie entre elles les trois distances ξ_1, η_1, ζ_1, que

l'on pourra, si l'on veut, considérer comme les coordonnées d'une droite. On en conclut que

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\eta\zeta\cos A-2\zeta\xi\cos B-2\xi\eta\cos C=0$$

est l'équation de deux points à l'infini. Pour trouver ces points, on mettra l'équation précédente sous la forme

$$(\xi-\eta\cos C-\zeta\cos B)^2+(\eta\sin C+\zeta\sin B)^2=0$$

ou

$$\xi-\eta e^{\pm C\sqrt{-1}}\zeta-e^{\pm B\sqrt{-1}}=0;$$

les coordonnées de ces points sont proportionnelles à

$$1,\quad -e^{\pm C\sqrt{-1}},\quad -e^{\pm B\sqrt{-1}};$$

ce sont les ombilics, comme on le verra § XXXIV.

XXIX. — Remarque au sujet des coordonnées tangentielles.

Quand les coordonnées d'un point sont transformées par une substitution, les coordonnées d'une droite sont transformées par la substitution inverse. Ces variables sont donc contragrédientes.

Considérons la droite

$$\xi x+\eta y+\zeta z=0;$$

si nous posons

$$x=a\,x'+b\,y'+c\,z',$$
$$y=a'x'+b'y'+c'z',$$
$$z=a''x'+b''y'+c''z',$$

l'équation de la droite devient

$$(a\xi+a'\eta+a''\zeta)x'+(b\xi+b'\eta+b''\zeta)y'+(c\xi+c'\eta+c''\zeta)z'=0;$$

les coordonnées (ξ,η,ζ) sont devenues $a\xi+a'\eta+a''\zeta$, $b\xi+b'\eta+b''\zeta\ \ldots$; elles sont bien transformées par la substitution inverse.

Si l'on considère l'équation d'une courbe $f(x,y,z)=0$ en coordonnées ordinaires, et son équation $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0$ en

coordonnées tangentielles, les fonctions f et φ sont alors des contrevariants.

Lorsque la fonction f est du second degré, la fonction φ est sa fonction adjointe.

XXX. — Des figures polaires réciproques.

On appelle *polaire réciproque* d'une courbe

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

par rapport à une conique

$$\varphi(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

l'enveloppe des polaires des divers points de la courbe relatives à la conique.

Pour trouver la polaire réciproque de (1) par rapport à la conique (2), il faudra chercher l'enveloppe de la polaire du point (x, y, z), savoir

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

que l'on peut aussi écrire

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + y \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + z \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0. \tag{4}$$

Pour cela, on éliminera x, y, z entre (1), et les équations obtenues en égalant à zéro les déterminants des premiers membres de (1) et (4), savoir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta};$$

l'une de ces équations est d'ailleurs surabondante.

La polaire réciproque d'une courbe est aussi le lieu des pôles de ses diverses tangentes.

En effet, rappelons que le pôle d'une droite

$$Ax + By + Cz = 0,$$

relativement à la conique (2), est donné par la formule

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : A = \frac{\partial\varphi}{\partial y} : B = \frac{\partial\varphi}{\partial z} : C;$$

le pôle de la tangente

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

à la courbe (1) sera donné par la formule suivante, où ξ, η, ζ seront les coordonnées du pôle,

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}.$$

Pour avoir le lieu du pôle, il faudra éliminer x, y, z entre ces équations et (1). C'est le procédé employé précédemment pour trouver la polaire réciproque de (1).

Il résulte de là que la polaire réciproque d'une courbe a pour polaire réciproque la courbe elle-même, ce qui justifie la dénomination de *polaires réciproques* donnée aux courbes que nous venons de considérer.

Il faut remarquer que la classe d'une courbe est égale au degré de sa polaire réciproque, et *vice versa*. En effet, si l'on considère une sécante à la courbe proposée, elle la rencontrera en m points, m désignant le degré de la courbe; les polaires de ces mêmes points concourront au pôle P de la droite considérée et seront tangentes à la polaire réciproque : ce seront d'ailleurs les seules tangentes que l'on pourra mener de P à cette courbe : elle est donc bien de la classe m.

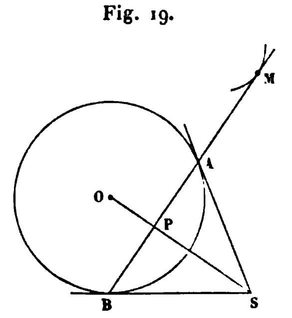
C. Q. F. D.

Ainsi la polaire réciproque d'une conique est une conique.

XXXI. — Des polaires réciproques par rapport à un cercle.

Cherchons (*fig.* 19) la nature de la polaire réciproque d'une courbe par rapport au cercle O de rayon R. Par un point M de cette courbe, menons une tangente MAB qui

Fig. 19.



coupe le cercle en A et B, puis les tangentes AS et BS à ce cercle; le point de concours S de ces tangentes sera le pôle de MAB ou le point de la polaire réciproque correspondant à M. On a, en joignant OS et en appelant P le point de rencontre avec AB,

$$OP \times OS = R^2;$$

or le point P appartient à la podaire de la courbe proposée par rapport au centre du cercle; donc :

La polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette courbe par rapport au centre du cercle et le module de la transformation est le carré du rayon du cercle.

XXXII. — Calcul des coordonnées de la polaire réciproque d'une courbe en fonction des coordonnées des points de la courbe.

Considérons le cercle imaginaire

$$\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0;$$

la polaire du point (x, y) par rapport à ce cercle aura pour équation

$$\xi x + \eta y + \zeta z = 0.$$

Supposons que le point x, y subisse un déplacement dx, dy; l'équation de la polaire deviendra

$$\xi(x + dx) + \eta(y + dy) + \zeta z = 0,$$

l'intersection de cette droite avec la première satisfera à l'équation

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz = 0,$$

où l'on peut supposer $dz = 0$; on a donc

$$\frac{\xi}{z\, dy - y\, dz} = \frac{\eta}{x\, dz - z\, dx} = \frac{\zeta}{x\, dy - y\, dx}.$$

On en conclut les coordonnées du point (ξ, η, ζ) de la figure polaire réciproque de la figure décrite par le point (x, y). En détruisant l'homogénéité, on a

$$(1) \qquad \xi = \frac{dy}{x\, dy - y\, dx}, \qquad \eta = \frac{-dx}{x\, dy - y\, dx}.$$

Les coordonnées de la tangente au lieu décrit par le point (x, y) sont faciles à calculer, car cette tangente a pour équation

$$(\mathrm{Y} - y)\, dx - (\mathrm{X} - x)\, dy = 0,$$

et ses coordonnées à l'origine ont pour inverses les expressions (1). Donc les coordonnées tangentielles d'une tangente à une courbe sont égales aux coordonnées du point correspondant de la polaire réciproque par rapport au cercle $\xi^2 + \eta^2 + 1 = 0$. Donc :

L'équation tangentielle d'une courbe est aussi l'équation de sa polaire réciproque en coordonnées ordinaires, quand on suppose les coordonnées tangentielles remplacées par des coordonnées ordinaires, la conique directrice étant le cercle $x^2 + y^2 + 1 = 0$ (voir p. 68).

XXXIII. — Podaires inverses.

On appelle *podaire inverse* d'une courbe la courbe qui a celle-ci pour podaire.

Pour trouver la podaire inverse d'une courbe, on peut chercher l'enveloppe des perpendiculaires aux extrémités des rayons vecteurs de cette courbe; on peut aussi s'appuyer sur ce que la polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette courbe. Par exemple :

1° *Quelle est la courbe dont la podaire est une droite?*

La transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire est un cercle; quant à la polaire réciproque de ce cercle, c'est une parabole ayant le pôle pour foyer; donc la courbe cherchée est une parabole, ce que l'on savait.

2° *Quelle est la courbe dont la podaire est un cercle?*

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cercle est un cercle, la transformée par polaires réciproques d'un cercle par rapport à un autre cercle est une conique ayant son foyer au centre de ce cercle; donc la podaire inverse d'un cercle est une conique ayant son foyer au pôle de la transformation, ce qui est évident par les propriétés connues de l'ellipse.

XXXIV. — Sur les ombilics et les droites isotropes.

Nous avons déjà dit ce que nous devions entendre par la droite de l'infini. On appelle *droite isotrope* une droite qui a pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{-1}$. Par tout point α, β passent deux droites isotropes ayant pour équations

$$y-\beta+\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0, \qquad y-\beta-\sqrt{-1}\,(x-\alpha)=0,$$

dont l'ensemble peut être représenté par

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=0.$$

Les deux droites isotropes passant en α, β forment un *cercle de rayon nul,* ayant son centre en α, β. Ce sont aussi, si l'on veut, les asymptotes de tous les cercles ayant leurs centres en α, β. Toutes les droites isotropes rencontrent la droite de l'infini en deux points fixes, que l'on appelle *ombilics.* Quoique ces notions soient en général bien connues du lecteur, nous allons préciser celle des ombilics.

Prenons des coordonnées trilinéaires : l'équation du cercle circonscrit au triangle de référence est

$$yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C=0 \qquad \text{ou} \qquad ayz+bxz+cxy=0,$$

A, B, C désignant les angles du triangle de référence; a, b, c ses côtés (on s'en assure facilement en remplaçant x, y, z par leurs valeurs en coordonnées ordinaires). L'équation d'un cercle quelconque s'obtiendra en ajoutant au premier membre de cette équation des termes du premier degré par rapport aux coordonnées ordinaires, soit, en coordonnées trilinéaires, des termes tels que

$$(ax+by+cz)(lx+my+nz),$$

car le premier facteur est une constante, le double de l'aire du triangle de référence. Ainsi l'équation d'un cercle quelconque est

$$(1)\qquad ayz+bxz+cxy+(ax+by+cz)(lx+my+nz)=0.$$

L'équation générale des droites isotropes s'obtiendra en écrivant que le premier membre de cette équation est le produit de deux facteurs du premier degré, ou en annulant son discriminant.

Si l'on coupe le cercle (1) par la droite de l'infini

$$(2)\qquad ax+by+cz=0,$$

on obtient le même résultat qu'en coupant le cercle

$$(3) \qquad ayz + bxz + cxy = 0$$

par la même droite. *Donc tous les cercles, tous les couples de droites isotropes rencontrent la droite de l'infini aux deux mêmes points, dont les coordonnées x, y, z sont solutions de* (3) *et* (2).

En éliminant z entre (2) et (3), on a

$$(x^2 + y^2)ab + xy(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

ce que l'on peut écrire, en divisant par ab,

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos C = 0;$$

d'où

$$\frac{y}{x} = -\cos C \pm \sqrt{-1}\sin C = -e^{\pm C\sqrt{-1}}$$

ou, si l'on veut,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{y}{x} &= e^{(\pi \pm C)\sqrt{-1}}, \\ \frac{z}{x} &= e^{(\pi \pm B)\sqrt{-1}}; \end{aligned} \right.$$

substituons ces valeurs dans l'équation (3), ou

$$x\sin A + y\sin B + z\sin C = 0;$$

nous aurons

$$\sin A + e^{(\pi \pm C)\sqrt{-1}}\sin B + e^{(\pi \pm B)\sqrt{-1}}\sin C = 0.$$

Pour que cette équation ait lieu, il faut prendre des signes contraires devant C et B dans les exponentielles. Les formules (4) donneront alors

$$\frac{y}{x} = e^{-(A+B)\sqrt{-1}}, \qquad \frac{z}{x} = e^{(A+C)\sqrt{-1}}$$

ou

$$\frac{y}{x} = e^{(A+B)\sqrt{-1}}, \qquad \frac{z}{x} = e^{-(A+C)\sqrt{-1}}.$$

On peut remarquer qu'en appelant x, y, z et x', y', z' les coordonnées des ombilics, on a

$$xx' = yy' = zz'.$$

En tout cas, l'ensemble des ombilics pourra toujours être représenté par les deux équations

$$ax + by + cz = 0,$$
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

XXXV. — Foyers des courbes planes.

On appelle *foyer* d'une courbe plane un point d'où l'on peut mener à cette courbe deux tangentes isotropes. C'est aussi, si l'on veut, le centre d'un cercle de rayon nul doublement tangent à cette courbe; la corde de contact est la *directrice* correspondante. Cette définition est la généralisation toute naturelle des foyers dans les courbes du second degré.

Soit

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation tangentielle d'une courbe; alors

$$f(\sqrt{-1},\ 1,\ -\beta - \alpha\sqrt{-1}) = 0$$

exprimera que $y - \beta + (x - \alpha)\sqrt{-1} = 0$ est tangente à la courbe.

Supposons l'équation précédente, mise sous la forme

$$P + \sqrt{-1}\,Q = 0;$$

alors

$$P - \sqrt{-1}\,Q = 0$$

exprimera que $y - \beta - (x - \alpha)\sqrt{-1} = 0$ est tangente à la courbe, et

$$P = 0, \qquad Q = 0$$

seront deux équations qui détermineront les foyers. Soit n la

classe de la courbe considérée, n^2 sera le nombre de ses foyers. C'est du reste ce que l'on peut constater comme il suit :

Par chaque ombilic du plan, on peut mener n tangentes à la courbe : ces $2n$ tangentes se rencontrent en n^2 points, qui sont les foyers.

Il y a une exception à la règle que nous venons de signaler : supposons que la courbe considérée passe i fois par les ombilics du plan ; par chaque ombilic on pourra mener $n - 2i$ tangentes à la courbe, distinctes des i tangentes que l'on peu mener par l'ombilic même, et des i tangentes confondues avec la droite de l'infini ; il y aura donc $(n - 2i)^2$ foyers, intersection de ces droites distinctes des tangentes *singulières* dont nous venons de parler.

Mais chacune des tangentes non singulières que l'on peut mener par un ombilic rencontrera les tangentes à l'autre ombilic en i points, ce qui fait en tout $n - 2i$ points de rencontre ; ces $n - 2i$ points de rencontre, ainsi que les $n - 2i$ autres points obtenus en permutant les rôles des ombilics, sont des foyers réels, que nous appellerons avec M. Laguerre les *foyers singuliers* de la courbe.

Il y a donc $(n - 2i)^2$ foyers ordinaires et $2(n - 2i)i$ foyers singuliers, en tout

$$n^2 - 4in + 4i^2 + 2ni - 4i^2 = n^2 - 2ni$$

foyers ; mais, si l'on considère les foyers singuliers comme doubles, il y aura

$$n^2 - 4in + 4i^2 + 4ni - 8i^2 = n^2 - 4i^2$$

foyers, qui, avec les ombilics qui sont des foyers d'ordre de multiplicité $2i^2$, feront les n^2 foyers dont une courbe de classe n est susceptible.

EXERCICES ET NOTES.

1. On appelle *podaire oblique* d'une courbe, par rapport à un point O, le lieu des pieds des obliques menées du point O sur les tangentes à la courbe, ces obliques faisant un angle constant avec les tangentes correspondantes. Cela posé, prouver que :

Toutes les podaires obliques d'un même point O par rapport à une courbe donnée C sont semblables.

Les podaires obliques en question ont pour enveloppe la courbe C.

2. On mène toutes les tangentes à une courbe donnée C, ces tangentes rencontrent deux droites fixes en A et B : soit M le milieu de AB ; on propose de montrer que, si l'on sait construire géométriquement la tangente en un point quelconque de la courbe C, on saura aussi construire la tangente en un point quelconque du lieu du point M.

3. Trouver les foyers de la courbe

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

4. Trouver les foyers de la courbe

$$(x^2+y^2)^2=ax^3.$$

5. Trouver les foyers de la courbe

$$x^3+y^3=1.$$

6. L'enveloppe de la courbe suivante, où θ est variable,

$$x\cos^m\theta+y\sin^m\theta=1,$$

a pour équation

$$x^{\frac{2}{2-m}}+y^{\frac{2}{2-m}}=1.$$

7. Trouver l'enveloppe d'une corde de grandeur constante dans l'ellipse ou l'hyperbole.

8. Trouver l'enveloppe des cercles coupant deux cercles fixes sous des angles égaux. (L'enveloppe se décompose.)

9. Un angle de grandeur constante pivote autour d'un point d'une ellipse, ses côtés rencontrent l'ellipse en A et B ; trouver l'enveloppe de la droite AB.

10. Si par un point O on mène une droite, cette droite rencontrera une courbe d'orde m en m points $A_1, A_2, \ldots, A_m$; déterminons sur cette droite un point A, tel que

$$\frac{m}{OA} = \frac{1}{OA_1} + \frac{1}{OA_2} + \ldots + \frac{1}{OA_m};$$

le lieu du point A, quand on fera tourner la droite autour du point O, sera une droite; trouver l'enveloppe de cette droite, quand on fait décrire au point O une droite.

11. Trouver l'enveloppe de la conique suivante, où X, Y, Z sont des fonctions linéaires de x, y,

$$\lambda^2 X^2 - \lambda(X^2 + Y^2 - Z^2) + Y^2 = 0;$$

conclure de là l'équation générale des coniques inscrites dans un quadrilatère.

12. Trouver l'équation tangentielle des foyers d'une conique donnée, soit par son équation ordinaire, soit par son équation tangentielle.

13. Trouver l'enveloppe d'une série de cercles ayant leurs centres sur une spirale logarithmique ($r = e^{\theta}$) et passant par le point auquel la spirale est asymptote.

14. Trouver l'enveloppe du diamètre d'un cercle qui roule sur une droite sans glisser (cycloïde).

15. Trouver l'enveloppe d'une série de cycloïdes engendrées par les points d'un cercle variable, roulant sur une droite fixe; on suppose que toutes les cycloïdes ont un point de rebroussement commun. [La cycloïde a pour équations $x = a(u - \sin u)$, $y = a(1 - \cos u)$, u désignant un paramètre variable.] Y a-t-il une enveloppe proprement dite?

16. On donne une courbe et un point O : sur chaque rayon vecteur OM de cette courbe on compte une longueur $OM' = \frac{\overline{OM}^2}{a}$, a étant un nombre constant; on propose de tracer la tangente au lieu des points M', connaissant la tangente au lieu des points M. Prendre pour la courbe donnée une droite, un cercle, etc.

17. On donne deux courbes; soient M et M' deux points pris sur l'une et l'autre courbe et tels que les tangentes aux courbes en ces

points soient parallèles; prouver : 1° que, N étant le milieu de MM', le lieu des points N aura pour tangente en N une droite parallèle aux tangentes en M et M' aux courbes proposées; 2° que, si par un point fixe on mène des droites OP égales et parallèles à MM', la tangente en P au lieu des points P sera parallèle à la tangente en M au lieu des points M.

18. Étant données deux droites concourantes AB et AC et un module k, on transforme la droite AB par rayons vecteurs réciproques en prenant pour pôles successivement tous les points de AC; on obtient ainsi une série de cercles dont on demande l'enveloppe.

19. On donne deux cercles C et C' et une courbe A à laquelle on sait mener les tangentes, on cherche les polaires d'un point M de la courbe A par rapport aux cercles C et C'; soit M' le point de concours de ces polaires : le lieu du point M' est une certaine courbe à laquelle on demande de construire une tangente en un point donné.

20. Les côtés d'un angle de grandeur constante touchent sans cesse deux courbes fixes; on propose de construire la tangente au lieu de son sommet.

21. On donne une droite et une courbe fixes, on mène les tangentes à la courbe; soit MT l'une d'elles, T désignant le point de rencontre de cette tangente avec la droite fixe DT : on mène la bissectrice de l'angle DTM; trouver l'enveloppe de cette bissectrice. (Étude du cas où la courbe donnée est un cercle.)

22. Étant donnée une courbe, on lui mène des tangentes, et, par les points où ces tangentes rencontrent une droite fixe, on lui mène des perpendiculaires, ces perpendiculaires enveloppant une courbe; on demande de trouver le point où l'une de ces tangentes touche son enveloppe.

23. Soient $p, q, r, \ldots$ des normales communes à une droite et à des courbes fixes P, Q, R, ...; supposons que l'on ait

$$f(p, q, r, \ldots) = 0;$$

la droite en question enveloppe une courbe C, et le point où la droite touche son enveloppe C est le centre de gravité de masses $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, $\frac{\partial f}{\partial r}$, ..., placées sur la droite aux points où les droites $p, q, r, \ldots$ la rencontrent.

24. Les distances p, q d'une droite à deux points fixes P, Q sont liées par l'une des relations

$$pq = \text{const.}, \quad \frac{p}{q} = \text{const.}, \quad p^2 + q^2 = \text{const.}, \quad ap + bq = \text{const.};$$

construire le point où la droite touche son enveloppe et trouver la nature de l'enveloppe (*voir* l'exemple précédent).

25. Trouver la plus courte distance de deux courbes (normale commune).

26. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre passant par des courbes données. (L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.)

27. Trouver le plus court chemin d'une droite à une autre, en passant par une courbe donnée.

28. Trouver sur une courbe donnée un point tel que la somme des carrés de ses distances à des points fixes soit un minimum. (Ce point est le pied de la normale abaissée du centre de gravité des points fixes sur la courbe.)

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES QUESTIONS QUI DÉPENDENT D'INFINIMENT PETITS D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER.

I. — Longueur d'un arc de courbe.

On appelle *longueur* d'un arc de courbe la limite du périmètre d'un polygone inscrit dans cet arc et dont les côtés décroissent indéfiniment pendant que leur nombre croît indéfiniment.

Nous ferons, au sujet de cette définition, plusieurs remarques :

1° Il est nécessaire de définir la longueur d'un arc de courbe ; en effet, l'égalité géométrique reposant sur l'idée de superposition (deux figures sont égales quand elles sont superposables ou quand elles se composent de parties superposables), il ne saurait y avoir d'égalité possible entre une droite et une courbe. Une définition seule peut donc nous amener à la comparaison d'une droite et d'une courbe et à l'évaluation, en unités de longueur, d'un arc de courbe. Quoi qu'il en soit, nous avons en nous l'idée vague de la longueur d'un arc de courbe ; la définition que nous avons donnée ne fait que préciser cette idée.

2° Pour qu'elle soit acceptable, il faut prouver que la longueur limite du polygone inscrit *existe*, et qu'elle ne dépend pas de la loi suivant laquelle on fait tendre ses côtés vers zéro.

Rapportons l'arc à deux axes rectangulaires ; soient x_0, y_0 et X, Y les coordonnées des extrémités de cet arc de

courbe; prenons entre les extrémités $n-1$ points de division, et soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}) leurs coordonnées. En joignant ces points de division, on obtiendra un polygone dont un côté aura pour longueur

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

ou, pour abréger,

$$\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2};$$

la longueur totale du périmètre du polygone sera

$$s=\sum_{i=0}^{i=n-1}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$$

ou

$$(1)\qquad s=\sum \Delta x_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}.$$

Nous supposerons d'abord $\frac{dy}{dx}=y'$ croissant de y'_0 à Y'.

Soit $f(x)$ l'ordonnée du point correspondant à l'abscisse x; on aura, en appelant θ un nombre compris entre o et 1,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(x_i+\theta\,\Delta x_i),$$

et par suite

$$(2)\qquad s=\sum \Delta x_i\sqrt{1+[f'(x_i+\theta\,\Delta x_i)]^2}.$$

Or, si, sur l'ordonnée correspondant à l'abscisse x_i, on prend une longueur égale à $\sqrt{1+[f'(x_i)]^2}$, le lieu des extrémités des droites ainsi obtenues sera une certaine courbe ayant pour équation

$$(3)\qquad \eta=\sqrt{1+[f'(x)]^2},$$

et l'expression (2) de s sera l'expression d'une certaine aire, comprise entre la somme des aires des rectangles de base Δx inscrits et circonscrits à la courbe (3); or les sommes des rectangles inscrits et circonscrits ont même limite : l'aire com-

prise entre l'axe des x, les ordonnées y_0, Y et la courbe (3). En effet, la différence de ces deux sommes est égale à $\sum \Delta x \, \Delta y$, c'est-à-dire moindre que $\sum M \, \Delta x$, M désignant le maximum de Δy qui tend vers zéro, ou que $M(X - x)$ qui tend aussi vers zéro; l'expression (2) de s a donc une limite finie aussi.

Le raisonnement que nous venons de faire convient encore au cas où y' serait décroissant, ou même alternativement croissant et décroissant, pourvu que ces alternatives de croissance et de décroissance ne soient pas en nombre infini.

Cherchons maintenant l'expression de la différentielle de la longueur de l'arc de courbe.

Soit s la longueur d'un arc compté à partir d'une origine fixe O prise sur la courbe; cette longueur, d'après ce que nous venons de voir, est représentée par l'aire de la courbe dont l'équation est

$$\eta = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Or, si l'on donne à l'abscisse x l'accroissement dx, l'aire de la courbe en question prend un accroissement compris entre deux rectangles ayant pour base dx et pour hauteur η et $\eta + \Delta\eta$; on peut donc prendre pour accroissement de l'aire en question $\eta \, dx$, qui sera aussi sa différentielle; mais cette expression est aussi celle de la différentielle de l'arc s; on a donc

$$ds = \eta \, dx$$

ou bien, en remplaçant η par sa valeur,

$$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx$$

ou, ce qui revient au même,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

ou bien encore

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

Donc :

THÉORÈME. — *La différentielle ds de la longueur de l'arc d'une courbe dont l'ordonnée est y et l'abscisse x est donnée par la formule*

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx;$$

si l'on fait passer dx sous le radical en observant que $y' dx = dy$, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{ou} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

formules importantes (où les coordonnées sont censées rectangulaires).

COROLLAIRE. — On a vu que dx et dy étaient proportionnels aux cosinus des angles que la tangente à la courbe fait avec les axes; cela résulte d'ailleurs de ce que $\frac{dy}{dx}$ est la tangente de l'angle α que cette droite fait avec l'axe des x; on a alors

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

ou bien

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

II. — Différentielle de l'arc dans divers systèmes de coordonnées.

1° *En coordonnées rectilignes obliques.* — Soit θ l'angle des axes : nous avons trouvé en coordonnées rectangulaires

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

donc ds est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont dx et dy sont les côtés; ds est donc rigoureusement égal, dans ce système de coordonnées, à la portion de tangente allant du point de contact à l'ordonnée voisine de ce point. Mais, dy différant de Δy d'une quantité du second ordre, on peut poser, aux termes du second ordre près,

$$ds^2 = dx^2 + \Delta y^2,$$

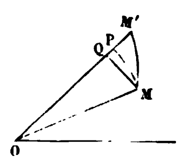
et dire, à cet ordre d'approximation près, que la différentielle de l'arc, ou même que l'accroissement Δs de cet arc, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont Δx et Δy seraient les côtés; cette hypoténuse est précisément la corde de l'arc Δs: ainsi l'arc Δs et sa corde ne diffèrent que par des termes du second ordre au moins (nous verrons plus loin que la différence est du troisième ordre); on peut donc, dans le calcul de la différentielle de l'arc, remplacer l'arc infiniment petit par sa corde.

Il résulte de là que, en coordonnées obliques, la différentielle d'un arc pouvant être remplacée par la corde correspondante et Δy par dy, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\theta.$$

2° *En coordonnées polaires.* — Si l'on appelle (*fig.* 20 r, θ les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe, $r + dr$, $\theta + d\theta$ les coordonnées d'un point voisin M'; la corde MM' joignant ces points, que nous pouvons appeler ds, sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle mixtiligne dont l'un des côtés M'P sera Δr ou dr, et dont l'autre côté sera l'arc

Fig. 20.



de cercle MP $= r\,d\theta$ décrit de l'origine O comme centre avec r pour rayon; cet arc peut remplacer le côté rectiligne MQ qui est son sinus. Quant à PQ égal à

$$r(1 - \cos d\theta) = r\,\frac{d\theta^2}{2} + \ldots,$$

il peut être négligé comme étant du second ordre; or on a dans le triangle MM'Q

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QM'}^2$$

ou, aux termes d'ordre supérieur près,

$$ds^2 = \overline{PM'}^2 + \overline{PM}^2$$

ou

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

3° *Coordonnées bipolaires.* — En appelant r, r' les rayons vecteurs et c la distance des pôles fixes ou foyers, on a

$$ds^2 = \frac{4rr'[rr'(dr^2 + dr'^2) - (r^2 + r'^2 - c^2)dr\,dr']}{p(p-c)(p-r)(p-r')},$$

formule où l'on a posé $2p = c + r + r'$. Il paraît difficile de généraliser cette formule.

III. — Des divers ordres du contact des courbes planes.

Si l'on considère (*fig.* 21) deux courbes ayant un point commun M et une sécante commune NN' rencontrant les courbes en des points N, N', voisins du point de contact,

Fig. 21.

mais faisant avec les tangentes en M des angles finis, les distances MN, MN' et NN' seront en général de même ordre; car les angles du triangle MNN' seront finis, leurs sinus aussi, et par conséquent les rapports MN : MN' : NN' aussi.

Mais, si l'angle NMN' est infiniment petit ou, ce qui revient au même, si les courbes sont tangentes en M, les angles N et N' restent encore finis, MN et MN' sont de même ordre. Quant à NN', il est d'un ordre supérieur; en effet, on a

$$\frac{MN}{\sin N'} = \frac{MN'}{\sin N} = \frac{NN'}{\sin M},$$

et, N, N′ étant finis et M infiniment petit, il faut que NN′ soit d'ordre supérieur.

L'ordre de NN′ est indépendant de l'orientation de la sécante NN′; en effet, en considérant une autre sécante, telle que NN″, dans le triangle N N′N″, le rapport de NN′ à NN″ est celui des sinus des angles opposés qui, par hypothèse, restent finis.

Cela posé, nous dirons (et nous serons en droit de dire) que *deux courbes, ayant un point commun* M, *ont en ce point un contact d'ordre n, quand la portion de sécante menée dans le voisinage de* M *interceptée entre les deux courbes sera d'ordre $n+1$. Par rapport aux distances des points d'intersection au point* M, *on suppose d'ailleurs que la position limite de la sécante n'est pas celle d'une tangente en* M *à l'une des deux courbes.*

Cherchons maintenant les conditions du contact d'ordre n de deux courbes passant en M; soient y et y_1 les ordonnées des deux courbes correspondant à une même abscisse x; au point M on a $y=y_1$. Si l'axe des y (ce que nous supposerons) n'est pas parallèle à la tangente en M, nous pourrons considérer une sécante parallèle à l'axe des y, menée dans le voisinage de M; elle coupera les courbes en des points ayant pour coordonnées $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ et $(x+\Delta x, y_1+\Delta y_1)$. La grandeur de cette sécante sera $\Delta y - \Delta y_1$, et, pour qu'il y ait contact d'ordre n, il faudra que $\Delta y - \Delta y_1$ soit d'ordre $n+1$; or (t. Ier, p. 126)

$$\Delta y = dy + \frac{1}{1.2} d^2 y + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} d^n y + \ldots,$$

$$\Delta y_1 = dy_1 + \frac{1}{1.2} d^2 y_1 + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots\ldots n} d^n y_1 + \ldots,$$

donc

$$\Delta y - \Delta y_1 = dy - dy_1 + \frac{1}{1.2}(d^2 y - d^2 y_1) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots n}(d^n y - d^n y_1) + \ldots,$$

et, pour que $\Delta y - \Delta y_1$ soit d'ordre $h+1$, il faut que l'on ait

$$dy = dy_1, \quad d^2y = d^2y_1, \quad \ldots, \quad d^ny = d^ny_1;$$

d'où l'on conclut le théorème suivant :

Théorème I. — *Pour que deux courbes aient en un point* M *un contact d'ordre n, il faut et il suffit qu'en un point les différentielles ou les dérivées de leurs ordonnées soient égales jusqu'à l'ordre n inclusivement.*

Si l'on prenait pour variable indépendante, non plus x, mais une autre variable t quelconque, les conditions de contact d'ordre n seraient, en appelant x et y, x_1 et y_1 les coordonnées de deux points correspondant à une même valeur de t pour laquelle il y a contact,

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1},$$
$$\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3} = \frac{d^2y_1\,dx_1 - d^2x_1\,dy_1}{dx_1^3}, \quad \ldots,$$

auxquelles on satisferait en posant

$$dx = dx_1, \quad d^2x = d^2x_1, \quad \ldots, \quad d^nx = d^nx_1;$$
$$dy = dy_1, \quad d^2y = d^2y_1, \quad \ldots, \quad d^ny = d^ny_1;$$

ces dernières conditions sont évidemment suffisantes, mais elles ne sont pas *nécessaires*. Elles expriment que les projections $\Delta x - \Delta x_1$, et $\Delta y - \Delta y_1$ d'une certaine corde commune sont d'ordre $n+1$.

Ceci d'ailleurs se voit aisément sur un exemple particulier : ainsi l'on peut avoir $dx = 2\,dx_1$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$, les deux courbes auront cependant un contact du premier ordre au moins; mais, si l'on a $dx = 2\,dx_1$, il est bon d'observer que MN et MN′, qui sont sensiblement parallèles, sont aussi à peu près dans le rapport de 1 à 2; $\frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{MN}}$ est alors fini, $\frac{\mathrm{NN'}}{\mathrm{MN}}$ étant fini; l'angle N est de même ordre que M et NN′ est à la limite

parallèle à la tangente en M. Ainsi, pour exprimer que deux courbes ont un contact d'ordre n, il suffira d'écrire que les dérivées ou les différentielles de leurs ordonnées prises par rapport à leurs abscisses sont les mêmes jusqu'à l'ordre n inclusivement.

On pourra aussi écrire, en prenant une variable indépendante quelconque, que les différentielles des deux coordonnées sont égales dans les deux courbes jusqu'à l'ordre n inclusivement; n des $2n$ équations ainsi écrites établiront un certain mode de dépendance des variables x et x_1, et les n autres équations seront celles du contact.

Pratiquement, pour écrire que deux courbes ont un contact d'ordre n, on différentiera l'équation de l'une de ces courbes et l'on supposera que les différentielles qui figurent dans le résultat soient tirées de l'équation de l'autre courbe.

Si l'on veut, par exemple, exprimer que l'ellipse

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

a un contact du premier ordre avec la droite

$$y = mx + n,$$

on écrira d'abord

$$b\sin t = ma\cos t + n,$$

ce qui exprime que les deux lignes se rencontrent; ensuite on différentiera et l'on aura

$$b\cos t = -ma\sin t.$$

Les deux lignes auront alors même dx et même dy, et par suite elles seront tangentes : cela revient à différentier $y = mx + n$, après avoir remplacé x et y par leurs valeurs tirées des équations de l'ellipse.

Pour exprimer que deux courbes représentées par les équations

$$\text{(A)} \qquad f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0$$

ont un contact d'ordre n, il suffira d'écrire que les valeurs

points; dans ce cas, on dit qu'il y a *surosculation*. Ainsi, par exemple, le cercle osculateur d'une courbe qui passe ordinairement par trois points de cette courbe, confondus en un seul, peut accidentellement contenir un quatrième point et devenir *surosculateur;* c'est ce qui arrive aux sommets d'une ellipse.

IV. — Droite osculatrice.

Proposons-nous, par exemple, de déterminer les coefficients de l'équation de la droite

$$y = ax + b, \tag{1}$$

de telle sorte qu'elle soit osculatrice d'une courbe donnée. L'y de la droite et celui de la courbe devront être les mêmes pour une même valeur de x, ainsi que leurs dérivées; or, en différentiant (1), on a

$$dy = a\,dx; \tag{2}$$

les équations (1) et (2) devront avoir lieu quand à l'y de la droite on aura substitué celui de la courbe. Cette substitution étant supposée faite, on a

$$a = \frac{dy}{dx}, \qquad b = y - x\frac{dy}{dx},$$

et l'équation de la droite osculatrice devient

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}\frac{dy}{dx} + y - x\frac{dy}{dx},$$

X et Y désignant alors les coordonnées courantes; c'est l'équation de la tangente, on devait s'y attendre.

Cherchons les points pour lesquels il y a surosculation : pour cela, différentions encore (2), en substituant à l'y de la droite celui de la courbe; on aura

$$d^2y = 0. \tag{3}$$

L'élimination de a, b entre (1), (2) et (3) fera connaître la

relation qui doit exister (indépendamment de l'équation de la courbe) entre x et y pour qu'il y ait surosculation; le résultat de l'élimination est l'équation (3) elle-même.

Ainsi, aux points où la tangente devient surosculatrice, on a $d^2y = 0$; ces points portent le nom de *points d'inflexion*.

En un point d'inflexion, la tangente coupe la courbe; ce fait devient évident, si l'on remarque que la courbe coupant trois fois sa tangente doit être mi-partie d'un côté de sa tangente, mi-partie de l'autre côté. *Autrement,* prenons la tangente au point d'inflexion pour axe des x et la normale pour axe des y; l'équation de la courbe sera de la forme

$$y = \varphi(x)$$

ou, par la formule de Maclaurin,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

Mais, pour $x = 0$, on a $y = 0$: donc $a = 0$; pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ est nul aussi : donc $b = 0$; de plus, la distance y d'un point de la courbe à la tangente doit être du troisième ordre pour qu'il y ait contact du second ordre; donc le terme en x^2 doit disparaître aussi, et l'on a

$$y = dx^3 + ex^4 + \ldots;$$

y change de signe avec x pour de très petites valeurs de x : donc l'axe des x coupe et touche à la fois la courbe au point d'inflexion.

Dans certaines courbes il existe des points où la tangente a un contact du troisième, du quatrième, du cinquième, etc. ordre; s'il y a contact du troisième ordre, la tangente ne coupe plus la courbe, le point d'inflexion est réel, mais il n'est plus apparent; l'équation de la courbe est alors de la forme

$$y = ex^4 + fx^5 + \ldots.$$

Lorsque l'équation d'une courbe se présente sous la forme $f(x, y) = 0$, ou sous la forme homogène

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

il existe une méthode élégante pour déterminer ses points d'inflexion.

Soient, pour abréger, f_1, f_2, f_3 les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$; soient, de même, $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}$ les dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Les points d'inflexion s'obtiendront en écrivant que $d^2y = 0$; on peut alors différentier l'équation (1) deux fois, en n'écrivant pas le terme en d^2y qui est nul; on a ainsi

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0,$$

$$f_{11}\,dx^2 + 2f_{12}\,dx\,dy + f_{22}\,dy^2 = 0,$$

ce qui donne, en éliminant dx et dy,

$$(2)\qquad f_{11}f_2^2 - 2f_{12}f_1f_2 + f_{22}f_1^2 = 0.$$

Cette formule jointe à (1) déterminera les points d'inflexion.

Toutefois il faut observer que la formule (2) peut avoir lieu sans que la courbe possède pour cela un point d'inflexion en (x, y); c'est ce qui arriverait si l'on avait, par exemple, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ce qui exige que le rapport $\frac{dy}{dx}$ soit indéterminé. Ainsi l'équation (2), outre les points d'inflexion, détermine encore certains points singuliers.

L'équation (2) peut encore s'écrire, comme il est facile de le constater,

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

et, si l'on observe, en appelant m le degré de f, qu'on a

$$\begin{aligned} (m-1)f_1 &= f_{11}x + f_{12}y + f_{13}z, \\ (m-1)f_2 &= f_{21}x + f_{22}y + f_{23}z, \\ 0 = mf &= f_1\,x + f_2\,y + f_3z, \end{aligned}$$

la formule précédente deviendra, en combinant convenablement ses lignes et ses colonnes,

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation qui, jointe à (1), fera connaître les points d'inflexion. Seulement il faut observer que l'on a supposé que f_1 et f_2 n'étaient pas nuls à la fois, en sorte que (4) a lieu pour les points qui satisferaient aux équations

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f = 0 \qquad \text{ou} \qquad f_3 = 0,$$

c'est-à-dire pour les points singuliers où $\frac{dy}{dx}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

Si f est algébrique de degré m, l'équation (4) représentera une courbe dite *hessienne* de $f = 0$, et de degré $3(m-2)$, en sorte que le nombre i des points d'inflexion d'une courbe de degré m est donné par la formule

$$i = 3m(m-2),$$

qui pourra parfois, comme on le verra, se trouver en défaut.

Remarque I. — Il est bon d'observer que, pour établir la formule (4), il a fallu supposer que f_1, f_2, f_3 n'étaient pas de degré 0; en effet, en remplaçant $xf_{11} + yf_{12} + zf_{13}$ par $(m-1)f_1, \ldots$, puis en divisant par $m - 1$ pour introduire le terme f_{13}, on suppose $m - 1 \lessgtr 0$. Ainsi, en écrivant l'équation de la parabole sous la forme $x - \frac{y^2}{z} = 0$, on pourrait lui trouver une infinité de points d'inflexion, l'équation (4) devenant identique pour $f = x - \frac{y^2}{z}$. En réalité, il n'y a pas de point d'inflexion dans cette parabole, ce dont on s'assure en mettant son équation sous la forme $xz - y^2 = 0$; la formule (4) devient alors absurde.

Remarque II. — Si f est homogène entier et du second degré, le hessien est égal au discriminant, et il ne peut y avoir de point d'inflexion que si ce discriminant est nul, c'est-à-dire si la courbe $f = 0$ se réduit à un système de deux droites.

Remarque III. — Lorsque tous les points d'une courbe sont des points d'inflexion, cette courbe se réduit à une droite, ou à un système de droites. Et, en effet, si l'on suppose $\frac{d^2y}{dx^2}$ nul, quel que soit x, $\frac{dy}{dx}$ reste constant et y est de la forme $cx + c'$, c et c' désignant deux constantes.

V. — Du cercle osculateur.

Le cercle pouvant être assujetti à passer par trois points, le cercle osculateur d'une courbe aura en général un contact du second ordre avec cette courbe ; nous allons chercher à en déterminer les éléments.

Soit

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

l'équation du cercle cherché, que nous supposons osculateur en x, y ; si l'on différentie cette équation en supposant dy, d^2y remplacés par le dy et le d^2y de la courbe, on aura exprimé qu'il y a contact du second ordre, et il viendra

$$(2) \qquad \begin{cases} (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$y-\beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y},$$

$$x-\alpha = \frac{dy}{dx}\frac{dx^2+dy^2}{d^2y};$$

et l'équation (1) donnera

$$R^2 = \left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right)^2 \frac{dx^2+dy^2}{dx^2},$$

ou

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

en posant $\frac{dy}{dx} = y'$.

En des points particuliers le cercle osculateur pourra posséder avec la courbe un contact du troisième ordre; en ces points appelés *sommets*, on a, outre les équations (1) et (2),

$$3\,dy\,d^2y + (y - \beta)\,d^3y = 0.$$

L'élimination de $y - \beta$ entre cette formule et la dernière équation (2) donne

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} = \frac{3\,dy\,d^2y}{d^3y},$$

ou

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0,$$

en posant

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy'}{dx}, \quad y''' = \frac{dy''}{dx}.$$

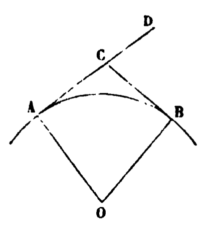
Nous allons maintenant étudier diverses propriétés du cercle osculateur. Un cercle est d'autant plus *courbé* que son rayon est plus petit, et il est naturel de dire que la courbure d'un cercle est mesurée par l'inverse $\frac{1}{R}$ de son rayon. De tous les cercles, celui qui se rapproche le plus d'une courbe est son cercle osculateur, et la *courbure* de la courbe sera naturellement mesurée par l'inverse du rayon du cercle osculateur.

On peut justifier d'une autre manière cette façon de mesurer la courbure : soit (*fig.* 22) AB un arc de cercle; menons les rayons OA, OB et les tangentes AC, BC; l'angle O ou son égal BCD est ce que nous appellerons l'angle de *contingence;* le rapport de cet angle à l'arc AB est l'inverse du rayon ou la courbure de AB.

Si l'on appelle ε l'angle de contingence d'une courbe quel-

conque, c'est-à-dire l'angle de deux tangentes ou de deux normales infiniment voisines menées par les points M et M' dont le premier soit fixe, et ds l'arc MM', le rapport $\frac{\varepsilon}{ds}$ pourra s'appeler par analogie la courbure de la courbe en M. Nous

Fig. 22.



allons voir qu'elle est égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur.

Nous observerons à cet effet que l'angle de contingence est la différence des angles que la tangente en x, y et au point voisin $x + dx, y + dy$ fait avec un axe fixe, l'axe des x par exemple; en appelant φ l'angle que la tangente en x, y fait avec l'axe des x, on a

$$\varepsilon = d\varphi, \quad \text{tang}\,\varphi = y' = \frac{dy}{dx}.$$

On a donc

$$\varepsilon = d\,\text{arc tang}\,\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y\,dx}{dx^2 + dy^2}$$

et, par suite,

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{d^2y\,dx}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}};$$

la valeur de $\frac{\varepsilon}{ds}$ est donc bien égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur, que l'on appelle pour cette raison *cercle de courbure*, et son rayon, *rayon de courbure*.

VI. — Application à quelques exemples.

Lorsque l'on veut calculer le rayon de courbure d'une courbe, on peut faire usage de la formule

$$(1) \qquad R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''};$$

mais il vaut mieux, quand y n'est pas exprimé en fonction de x, faire usage de la formule suivante, que l'on obtient en transformant la précédente de telle sorte que la variable indépendante, au lieu d'être x, soit tout à fait quelconque; on a alors, en observant que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{dx^3},$$

l'expression suivante de R :

$$(2) \qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}.$$

On devra prendre le second membre qui contient un radical, avec un signe tel que R soit positif. Toutefois on peut donner un signe à R, celui de y'' ou de $d^2y\,dx - d^2x\,dy$, suivant que l'on fera usage de la formule (1) ou (2). Alors on pourra dire que le rayon de courbure ou la courbure est positif ou négatif en un point, suivant que l'arc de courbe en ce point tournera ou ne tournera pas son centre de courbure vers les y positifs. Il y a évidemment là une convention arbitraire, mais qui pourra avoir son utilité dans certains cas. Nous allons maintenant appliquer les formules (1), (2) à quelques exemples.

Parabole. — L'équation de la parabole est

$$(\alpha) \qquad y = \frac{x^2}{2p};$$

on a alors

$$y' = \frac{x}{p}, \qquad y'' = \frac{1}{p};$$

par suite, l'équation (1) donne

$$R = \frac{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

La normale à la même courbe est donnée par la formule

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = \frac{x^2}{2p^2}\sqrt{p^2+x^2}.$$

Si l'on changeait y en $y + \frac{p}{2}$, l'équation (α) deviendrait

$$y = \frac{x^2 + p^2}{2p};$$

l'expression de R ne changerait pas, mais celle de N devien drait $\frac{(x^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p}$, et l'on aurait

$$R = 2N.$$

Ainsi, dans la parabole, le rayon de courbure est double de la normale comptée du point de contact jusqu'à la directrice.

Ellipse et hyperbole. — Les équations

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi$$

représentent une ellipse, et les équations

$$x = a\,\frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}, \qquad y = b\,\frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$$

une hyperbole. Si, en prenant φ pour variable indépendante, on applique la formule (2), on trouve pour l'ellipse

$$R = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \frac{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

et, en appelant N la normale,

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$$
$$= \frac{b}{a}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}};$$

on en conclut, par l'élimination de φ,

$$R = \frac{N^3 a^2}{b^4}$$

ou, en appelant p le demi-paramètre,

$$R = \frac{N^3}{p^2}.$$

On a une formule analogue pour l'hyperbole.

Cycloïde. — Considérons encore la cycloïde donnée par les équations suivantes, où t désigne un paramètre variable et a une constante,

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Si on lui applique la formule (2), on a

$$R = \frac{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{1-\cos t}a = 2^{\frac{3}{2}}a\sqrt{1-\cos t}.$$

La normale à la cycloïde est donnée par la formule

$$N = a\sqrt{2-2\cos t} = 2^{\frac{1}{2}}a\sqrt{1-\cos t};$$

d'où l'on conclut

$$R = 2N.$$

Ainsi, dans la cycloïde, le rayon de courbure est double de la normale.

VII. — Propriétés générales concernant la courbure.

Il est souvent commode de prendre l'arc pour variable indépendante, quand on étudie les propriétés d'une courbe;

dans ce cas, l'expression de la courbure prend une forme élégante. Reprenons la formule (2) du paragraphe précédent

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy},$$

et écrivons-la ainsi

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2}{(dx^2 + dy^2)^3};$$

si l'on appelle s l'arc de courbe, on a

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 = ds^2;$$

donc

$$(2) \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2}{ds^3}.$$

Or on a identiquement

$$(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)(dx^2 + dy^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y)^2;$$

si l'on différentie la formule (1) par rapport à s, il vient

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0.$$

La formule précédente devient alors, en ayant égard à (1),

$$(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)\,ds^2,$$

et (2) devient

$$(3) \qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2;$$

les coordonnées α, β du centre de courbure peuvent se mettre sous la forme

$$(4) \qquad \alpha = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad \beta = y + R\frac{dx}{ds}.$$

Il est souvent avantageux de faire entrer dans l'étude des courbes le rayon de courbure et l'arc; les dérivées $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$

peuvent s'exprimer au moyen de R : il suffit pour cela de combiner l'équation (3) avec

$$(5) \qquad 0 = \frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds},$$

obtenue en différentiant

$$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2.$$

On trouve alors

$$(6) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{dy}{ds}, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\frac{dx}{ds}$$

ou, en appelant φ l'angle que la tangente fait avec l'axe des x,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\sin\varphi, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\cos\varphi.$$

Nous allons utiliser ces formules pour établir deux théorèmes importants :

Théorème I. — *La distance d'un point d'une courbe à la tangente au point infiniment voisin est égale, aux termes du troisième ordre près, au carré de l'arc divisé par le double du rayon de courbure.*

En effet, la tangente en (x, y) a pour équation

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

la distance p du point $x + \Delta x, y + \Delta y$ à cette tangente est donnée par la formule

$$p = \pm\frac{dx\,\Delta y - dy\,\Delta x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm\frac{dx\,\Delta y - \Delta x\,dy}{ds};$$

or

$$\Delta y = dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \ldots,$$
$$\Delta x = dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \ldots,$$

et il vient, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$p = \pm \frac{\frac{1}{2}(dx\,d^2y - d^2y\,dx)}{ds} = \pm \frac{1}{2}\,\frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{ds^3}\,ds^2$$

ou enfin

$$p = \frac{ds^2}{2R}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *La différence entre un arc infiniment petit et sa corde est du troisième ordre; elle a pour expression* $\frac{ds^3}{24R^2}$

En effet, soient x, y les coordonnées d'une extrémité d'un arc infiniment petit ds; les coordonnées de son autre extrémité seront $x + \Delta x, y + \Delta y$ ou, en prenant l'arc pour variable indépendante,

$$x + dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \ldots \quad \text{et} \quad y + dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \ldots;$$

la corde c du petit arc ds sera alors donnée par la formule

$$c^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

ou

$$c^2 = (dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x)^2 + (dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y)^2,$$

en négligeant les termes du quatrième ordre.

En effectuant les calculs indiqués, il vient

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} c^2 = dx^2 + dy^2 &+ (dx\,d^2x + dy\,d^2y) \\ &+ \tfrac{1}{4}(d^2x^2 + d^2y^2) + \tfrac{1}{3}(dx\,d^3x + dy\,d^3y); \end{aligned} \right.$$

or on a

$$dx^2 + dy^2 = ds^2$$

et, en différentiant, l'arc étant variable indépendante,

$$(7) \qquad dx\,d^2x + dy\,d^2y = 0;$$

en différentiant encore, on a

$$d^2x^2 + d^2y^2 + dx\,d^3x + dy\,d^3y = 0$$

ou, en vertu de (3),

$$(8) \qquad -(dx\,d^3x + dy\,d^3y) = d^2x^2 + d^2y^2 = \frac{ds^4}{R^2}.$$

L'équation (6) donne, en vertu de (7) et (8),

$$c^2 = ds^2 + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}\right)\frac{ds^4}{R^2}$$

ou

$$c = ds\sqrt{1 - \frac{1}{12}\frac{ds^2}{R^2}}.$$

Si l'on développe le radical par la formule du binôme, on a

$$c = ds\left(1 - \frac{1}{24}\frac{ds^2}{R^2}\right);$$

en négligeant les termes du quatrième ordre, on en conclut

$$ds - c = \frac{1}{24}\frac{ds^3}{R^2},$$

formule que nous voulions établir.

VIII. — Développées des courbes planes.

Reprenons les équations qui ont servi à déterminer le centre de courbure d'une courbe

$$(1) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2,$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy = 0,$$

$$(3) \qquad dx^2 + dy^2 + (y-\beta)\,d^2y = 0,$$

et qui s'obtiennent en différentiant deux fois la formule (1). Interprétons successivement chacune de ces équations.

1° L'équation (1), abstraction faite de son origine, exprime que R est la distance du point (α, β) au point (x, y) variable de la courbe; l'équation (2), obtenue en différentiant (1), exprime que le point (x, y) est choisi de telle sorte que dR soit nul, c'est-à-dire de telle sorte que R soit minimum ou

maximum; mais l'équation (3) exprime que $d^2R = 0$, c'est-à-dire que le point (α, β) est dans une situation telle qu'il n'y a ni maximum ni minimum.

Or (2) est l'équation de la normale en x, y quand on considère α et β comme coordonnées courantes; ainsi la plus courte ou la plus grande distance rectiligne d'un point à une courbe se compte, en général, sur la normale passant par ce point, excepté quand le point donné est le centre de courbure.

2° L'équation (2) représente, comme nous l'avons dit, la normale à la courbe en x, y. Désignons, pour abréger, par $N = 0$ cette équation; l'équation de la normale voisine sera $N + dN = 0$, et le point de rencontre des deux normales infiniment voisines sera donné par les équations simultanées

$$N = 0, \quad N + dN = 0 \quad \text{ou} \quad N = 0, \quad dN = 0.$$

Or (3) est précisément $dN = 0$; les équations (2) et (3) font donc connaître le point (α, β) d'intersection de deux normales infiniment voisines. Ce point est précisément le centre de courbure.

Ainsi *deux normales infiniment voisines se coupent au centre de courbure.*

3° Le lieu des intersections successives de deux normales voisines est l'enveloppe de ces normales; donc *l'enveloppe des normales d'une courbe est le lieu des centres de courbure de cette courbe;* on lui a donné le nom de *développée* de la courbe. Si la courbe A est la développée de la courbe B, on dit que B est la *développante* de A.

4° Différentions les formules (1), (2), en observant que α, β, R sont fonctions de x; nous aurons

$$(x-\alpha)(dx-d\alpha)+(y-\beta)(dy-d\beta) = R\,dR,$$
$$(dx-d\alpha)dx+(dy-d\beta)dy+(y-\beta)d^2y = 0.$$

En vertu de (2) et (3) ces formules se simplifient et donnent

$$(4) \qquad (x-\alpha)d\alpha+(y-\beta)d\beta = R\,dR,$$

$$(5) \qquad d\alpha\,dx + d\beta\,dy = 0;$$

la seconde de ces équations montre que la direction $d\alpha$, $d\beta$ de la tangente à la développée est perpendiculaire à la direction dx, dy de la tangente à la courbe proposée; donc la normale à la courbe proposée touche la développée, ce que l'on savait déjà.

Or (2) donne

$$\frac{x-\alpha}{dy} = -\frac{y-\beta}{dx},$$

et (5) donne

$$\frac{d\alpha}{dy} = -\frac{d\beta}{dx};$$

donc

$$\frac{x-\alpha}{d\alpha} = \frac{y-\beta}{d\beta} = \frac{(x-\alpha)d\alpha + (y-\beta)d\beta}{d\alpha^2 + d\beta^2} = \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{d\alpha^2 + d\beta^2}},$$

c'est-à-dire, en vertu de (1) et (4), si l'on désigne par $d\sigma$ l'arc de développée,

$$\frac{R\,dR}{d\sigma^2} = \frac{R}{d\sigma} \quad \text{ou} \quad dR = d\sigma.$$

On déduit de là

$$R - R_0 = \sigma - \sigma_0,$$

R_0 désignant la valeur de R pour $\sigma = \sigma_0$. Cette formule montre que *la portion d'arc de développée* $\sigma - \sigma_0$, *comprise entre les deux rayons de courbure* R *et* R_0, *est égale à leur différence.*

C'est cette propriété qui a fait donner à la courbe que nous etudions le nom de *développée*. Supposons que l'on attache un fil en un point de la développée et que ce fil soit d'abord enroulé sur un arc de cette développée; si l'on déroule le fil, il restera tangent à la développée, et son extrémité libre décrira la développante.

Nous allons maintenant faire des applications des théories précédentes à la recherche de quelques développées. Deux moyens, qui rentrent au fond l'un dans l'autre, vont s'offrir à nous :

1° En considérant la développée comme l'enveloppe des normales, on écrira l'équation de la normale à la courbe pro-

posée en fonction d'un seul paramètre, si faire se peut, et l'on en cherchera l'enveloppe par le procédé connu.

2° On fera usage des formules

$$(6)\qquad \begin{cases} (x-\alpha)dx + (y-\beta)dy = 0, \\ dx^2 + dy^2 + (y-\beta)d^2y = 0, \end{cases}$$

qui lient les coordonnées d'un point (x, y) de la courbe à un point (α, β) de la développée ; on éliminera ensuite x, y, dx, dy d^2y entre ces équations et celles de la courbe différentiée deux fois : la résultante en α, β sera l'équation de la développée.

Remarque. — Si l'on se donne une relation entre α et β et si, entre cette relation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ et (6), on élimine α et β, on aura une relation entre x, y, dx, dy, d^2y qui sera l'équation *différentielle* de la développante de la courbe $\varphi(\alpha, \beta) = 0$.

On peut aussi trouver la développante en cherchant le lieu des points obtenus en portant sur chaque tangente une longueur égale à l'arc compté à partir d'un point fixe.

Les courbes algébriques ont les mêmes foyers que leurs développées ; cela tient à ce qu'un foyer d'une courbe est un point d'où l'on peut mener deux tangentes isotropes à la courbe.

Or deux tangentes isotropes sont aussi deux normales isotropes ; car les droites isotropes sont perpendiculaires sur elles-mêmes, leurs coefficients angulaires étant $\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$. Les normales isotropes d'une courbe sont des tangentes isotropes de la développée, et par suite les foyers de la courbe sont des foyers de la développée.

Réciproquement, les foyers de la développée sont des foyers de la courbe ; car, par les foyers de la développée, on peut mener deux tangentes isotropes à cette développée, qui sont aussi des normales isotropes à la courbe proposée ou des tangentes isotropes à cette courbe.

Nous reviendrons sur cette question des foyers des courbes et de leurs développées pour expliquer un paradoxe ; il semble,

en effet, au premier abord, que le nombre des foyers d'une courbe soit une fonction bien déterminée de son degré comme sa classe, et que par suite le degré d'une courbe soit le même que celui de sa développée. Il n'en est rien, et nous allons bientôt le voir sur de nombreux exemples, et, je le répète, nous expliquerons plus tard pourquoi.

IX. — Applications des théories précédentes.

Développée de l'ellipse. — Nous prendrons les équations de l'ellipse sous la forme

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi;$$

l'équation de la normale sera

$$(1) \qquad by\cos\varphi - ax\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Pour trouver la développée de l'ellipse, il suffit de chercher l'enveloppe de cette normale; pour cela, nous différentierons son équation par rapport à φ, ce qui donnera

$$(2) \qquad by\sin\varphi + ax\cos\varphi - c^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 0;$$

puis, entre cette équation et (1), nous éliminerons φ. Pour faire cette élimination, on multiplie (1) par $\sin\varphi$, (2) par $\cos\varphi$; on retranche et l'on a

$$ax = -c^2\sin^3\varphi.$$

On trouve d'une façon analogue

$$by = c^2\cos^3\varphi.$$

Ajoutant ces équations, après les avoir élevées à la puissance $\frac{2}{3}$, on a

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}:$$

c'est l'équation de la développée de l'ellipse. Écrite sous forme rationnelle, cette équation devient

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0;$$

elle est donc du sixième degré.

La discussion de cette courbe est facile; elle possède quatre rebroussements sur les axes.

Si l'on construit une courbe semblable à la développée de l'ellipse, elle aura pour équation

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} l^{\frac{2}{3}},$$

et, si l'on fait converger b vers a, cette équation devient

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}};$$

c'est l'enveloppe d'une droite de longueur constante qui glisse entre deux droites rectangulaires. On pourrait appeler cette courbe la *développée du cercle;* nous la rencontrerons bientôt dans une autre théorie.

Développée de l'hyperbole. — Si l'on représente l'hyperbole par les deux équations

$$x = a\,\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2},$$

$$y = b\,\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2},$$

un calcul analogue à celui qui a été fait pour l'ellipse nous donne l'équation de la développée de l'hyperbole

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Cette courbe a deux rebroussements sur l'axe des x et quatre branches infinies.

La développée de l'hyperbole équilatère est

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ou

$$(x^2 - y^2 - c^2)^3 - 27c^2x^2y^2 = 0.$$

Développée de la parabole. — On pourrait trouver la développée de la parabole en cherchant l'enveloppe de sa normale, dont on prendrait l'équation en fonction du coefficient

angulaire, par exemple. Mais, pour varier les méthodes, nous la chercherons en observant que l'équation d'une normale à la parabole

$$y^2 = 2px$$

est

(1) $$y = mx - pm - p\frac{m^3}{2}.$$

Par un point donné (x,y), on peut donc en faire passer trois, dont deux peuvent être imaginaires ou confondues. Or le lieu des points d'où l'on peut mener deux normales confondues est évidemment la développée ; on aura donc, en général, la développée d'une courbe en exprimant que l'équation de la normale en fonction d'un paramètre variable a deux racines égales. La condition pour que (1) ait deux racines égales est

$$8\left(\frac{p-x}{p}\right)^3 + 27\frac{y^2}{p^2} = 0,$$

ou, par un changement de coordonnées très simple,

$$y^2 = \frac{8x^3}{27p};$$

cette courbe est la *parabole semi-cubique*.

Développée de la cycloïde. — Les équations de la cycloïde sont

$$x = a(u - \sin u),$$
$$y = a(1 - \cos u);$$

celle de la normale au point $a(u - \sin u)$, $a(1 - \cos u)$ est

$$(x - au + a\sin u)(1 - \cos u) + (y - a + a\cos u)\sin u = 0,$$

ou

$$x(1 - \cos u) + y\sin u = au(1 - \cos u),$$

et, en différentiant,

$$x\sin u + y\cos u = a(1 - \cos u) + au\sin u.$$

Si l'on tire de ces équations x et y en fonction de u, on a

$$x = a(u + \sin u),$$
$$y = -a(1 - \cos u);$$

ce sont les équations de la développée.

Si l'on transporte l'origine au point dont les coordonnées sont $x = a\pi$, $y = -2a$, on trouve

$$x = -a\pi + au + a \sin u,$$
$$y = a + a \cos u,$$

et, en faisant $u = \pi + u'$, on a finalement

$$x = a(u' - \sin u'),$$
$$y = a(1 - \cos u');$$

ce sont les équations d'une cycloïde égale à la première. Ainsi la développée de la cycloïde est une autre cycloïde égale et semblablement placée ; mais le sommet de la seconde cycloïde coïncide avec l'un des points de rebroussement de la première.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette proposition par la Géométrie, ce qui est très facile en observant que le rayon de courbure est double de la normale.

Développante du cercle. — La recherche des développantes est du ressort du Calcul intégral ; mais la développante du cercle est une courbe remarquable, qu'il est bon de connaître : aussi en chercherons-nous l'équation.

Pour trouver l'équation de la développante du cercle, il suffit de chercher le lieu des points obtenus en portant sur les tangentes au cercle des longueurs égales à l'arc correspondant compté à partir d'un point fixe. Nous ferons passer l'axe des x par ce point fixe et l'origine des coordonnées sera au centre du cercle. En appelant R le rayon, ωR l'arc compté à partir du point fixe, les coordonnées du point correspondant de la développante seront données par les formules

$$x = R \cos\omega + \omega R \sin\omega, \qquad y = R \sin\omega - \omega R \cos\omega.$$

La forme de la courbe est celle de deux spirales se rencontrant sur le cercle en formant un rebroussement.

La podaire de la développante du cercle, par rapport au centre, a son rayon vecteur égal à l'arc $R\omega$; c'est donc une spirale d'Archimède.

Si l'on ajoute les équations (1), après les avoir élevées au carré, on a

$$x^2+y^2 = R^2+\omega^2 R^2;$$

d'où l'on conclut, en posant $x^2+y^2=r^2$,

$$\omega = \frac{\sqrt{r^2-R^2}}{R}.$$

Il en résulte l'équation suivante, en coordonnées polaires :

$$r\cos\theta = R\cos\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{R}+\sqrt{r^2-R^2}\sin\frac{\sqrt{r^2-R^2}}{R}.$$

X. — Rayon de courbure en coordonnées obliques.

Si, dans la formule

$$(1) \qquad R = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx-d^2x\,dy},$$

qui donne l'expression du rayon de courbure en coordonnées rectangulaires, on pose

$$(2) \qquad x = x'+y'\cos\theta, \qquad y = y'\sin\theta,$$

x' et y' seront les coordonnées du point (x, y) dans un système de coordonnées obliques, dans lequel le nouvel axe des x coïncidera avec l'ancien, et dans lequel le nouvel axe des y fera l'angle θ avec l'axe des x. Des formules (2) on tire

$$dx = dx'+dy'\cos\theta, \qquad dy = dy'\sin\theta,$$
$$d^2x = d^2x'+d^2y'\cos\theta, \qquad d^2y = d^2y'\sin\theta;$$

si l'on fait $d^2x'=0$ et si l'on porte ces valeurs dans (1), on a

$$R = \frac{(dx'^2+dy'^2+2\,dx'\,dy'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{d^2y'\,dx'\sin\theta}$$

ou, en supprimant les accents,

$$(3)\quad R = \frac{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx\sin\theta} = \frac{(1 + y'^2 + 2y'\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{y''\sin\theta}.$$

Nous ferons une application de cette formule à l'ellipse rapportée à deux diamètres conjugués. Son équation est

$$(4)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Cherchons le rayon de courbure à l'extrémité du diamètre b; il faudra faire $x = 0$, $y = b$, $y' = 0$: on a, en différentiant (4),

$$a^2yy' + b^2x = 0,$$

$$a^2yy'' + a^2y'^2 + b^2 = 0;$$

en faisant $x = 0$, $y = b$, $y' = 0$, on a

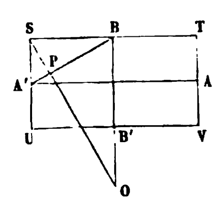
$$a^2by'' = -b^2 \qquad \text{ou} \qquad y'' = -\frac{b}{a^2}.$$

La formule (3) donne alors

$$R = \frac{a^2}{b\sin\theta},$$

formule très simple et facile à construire. Pour les sommets, elle conduit à la construction suivante, parfois utile : soient (*fig.* 23) STUV le rectangle circonscrit; A, A', B, B' les

Fig. 23.



sommets de l'ellipse. Joindre A'B et du point S mener une perpendiculaire à A'B, la prolonger jusqu'à l'axe BB'; O est le centre de courbure pour le sommet B.

La parabole, pour laquelle on a $y = \frac{x^2}{2p}$, $y' = \frac{x}{p}$, $y'' = \frac{1}{p}$,

donne au point où elle rencontre son diamètre qui passe par l'origine, $y = 0$, $y' = 0$ et

$$R = \frac{p}{\sin\theta},$$

ce qui conduit à une construction très simple.

XI. — Rayon de courbure en coordonnées homogènes.

L'équation générale des cercles tangents à une courbe donnée de degré m

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

au point (x, y, z), est

$$(2) \quad (X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \lambda(Xf_1 + Yf_2 + Zf_3),$$

f_1, f_2, f_3 désignant, comme plus haut, les dérivées de f, et λ un coefficient indéterminé. En effet, l'équation (2) est celle d'un cercle, car $Z - z = 0$, puisque $Z = z = 1$. En outre, ce cercle passe par les intersections de la tangente

$$Xf_1 + \ldots = 0$$

avec le cercle de rayon nul $(X - x)^2 + (Y - y)^2 = 0$; ainsi le cercle en question a deux points en x, y, z, confondus avec la tangente à la courbe.

Exprimons qu'il est à une distance du troisième ordre de la courbe; la puissance du point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ devra être du troisième ordre, ou, si l'on veut, la formule (2) sera vérifiée, aux termes du troisième ordre près, en remplaçant X par $x + \Delta x + \ldots$ ou par $x + dx + \frac{1}{2}d^2x + \ldots$; on aura, en n'écrivant pas les termes nuls $\Sigma f_1\, dx$,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \tfrac{1}{2}\lambda(f_1 d^2x + f_2 d^2y + f_3 d^2z);$$

d'où

$$\lambda = \frac{2\,ds^2}{f_1 d^2x + f_2 d^2y + f_3 d^2z},$$

ou simplement

$$(3)\qquad \lambda = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{f_1 d^2x + f_2 d^2y},$$

en observant que $dz = 0$. Or on a

$$f_1 dx + f_2 dy = 0,$$

$$f_{11} dx^2 + 2 f_{12} dx\, dy + f_{22} dy^2 + f_1 d^2x + f_2 d^2y = 0;$$

tirant de là $f_1 d^2x + f_2 d^2y$, la formule (3) donne

$$\lambda = \frac{-2(dx^2 + dy^2)}{f_{11} dx^2 + 2 f_{12} dx\, dy + f_{22} dy^2}$$

ou, observant que $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2}$,

$$(4)\qquad \lambda = \frac{-2(f_1^2 + f_2^2)}{f_{11} f_2^2 - 2 f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2}.$$

Le dénominateur peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ou, en faisant usage des relations qui existent entre f et ses dérivées (*voir* p. 94),

$$\frac{1}{(m-1)^2} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}.$$

Appelons H cette expression, et nous aurons, au lieu de (4),

$$\lambda = \frac{-2(f_1^2 + f_2^2)}{H};$$

l'équation (2) devient alors

$$(5)\qquad \sum (X - x)^2 + \frac{2(f_1^2 + f_2^2)}{H} \sum X f_1 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont données par les formules

$$X - x + \frac{f_1^2 + f_2^2}{H} f_1 = 0,$$

$$Y - y + \frac{f_1^2 + f_2^2}{H} f_2 = 0$$

et l'on a

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2} = -\frac{f_1^2 + f_2^2}{H}.$$

Si l'on se rappelle que $\frac{f_1}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$, $\frac{f_2}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2}}$ sont les cosinus des angles que la normale fait avec les axes, on en conclura cette valeur du rayon de courbure

$$R = \frac{(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

On voit qu'il est infini pour $H = 0$, c'est-à-dire en un point d'inflexion, ce qui était évident *a priori;* en sorte que cette remarque pourrait constituer une seconde manière de trouver les points d'inflexion.

Si l'on fait $f_1^2 + f_2^2 = \Delta^2$, on pourra écrire ainsi l'équation du cercle osculateur :

$$\left(X - x + \frac{\Delta}{H} f_1\right)^2 + \left(Y - y + \frac{\Delta}{H} f_2\right)^2 = \frac{\Delta^6}{H^2}.$$

On serait arrivé à ce résultat en appliquant aux formules données plus haut les règles de la différentiation des fonctions implicites.

XII. — Rayon de courbure en coordonnées polaires.

Pour trouver l'expression du rayon de courbure R d'une courbe en coordonnées polaires, on peut partir de la formule

$$(1) \qquad R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy},$$

qui donne le rayon de courbure en coordonnées rectangulaires, et effectuer le changement de variables donné par les formules de transformation de coordonnées, qui servent à passer des coordonnées rectilignes x, y aux coordonnées polaires r, θ, à savoir

$$(2) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Pour effectuer les calculs d'une façon élégante, on peut multiplier la seconde formule (2) par $\pm\sqrt{-1}$ et l'ajouter à la première; on a ainsi les formules équivalentes

$$x + y\sqrt{-1} = re^{\theta\sqrt{-1}}, \qquad x - y\sqrt{-1} = re^{-\theta\sqrt{-1}}$$

et, en différentiant,

$$(3) \qquad \begin{cases} dx + dy\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}}\,(dr + \sqrt{-1}\,r\,d\theta), \\ dx - dy\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}(dr - \sqrt{-1}\,r\,d\theta). \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations membre à membre, on trouve

$$(4) \qquad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2.$$

En différentiant les équations (3) et en prenant $d^2\theta = 0$, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} d^2x + d^2y\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}}\,(d^2r + 2\sqrt{-1}\,dr\,d\theta - r\,d\theta^2), \\ d^2x - d^2y\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}(d^2r - 2\sqrt{-1}\,dr\,d\theta - r\,d\theta^2). \end{cases}$$

Si l'on multiplie la première équation (5) par la seconde équation (3), et la seconde équation (5) par la première équation (3), si l'on retranche ensuite les résultats après avoir divisé par $2\sqrt{-1}$, il vient

$$d^2y\,dx - d^2x\,dy = -(r\,d^2r\,d\theta - 2\,dr^2\,d\theta - r^2\,d\theta^3),$$

et par suite la formule (1) devient, en changeant le signe du second membre, ce qui n'a pas d'inconvénient, puisque ce second membre comporte le signe $\pm$,

$$R = \frac{(dr^2 + r^2\,d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{r\,d^2r\,d\theta - 2\,dr^2\,d\theta - r^2\,d\theta^3}.$$

Les points d'inflexion s'obtiennent en supposant $R = \infty$; ils sont donc donnés en coordonnées polaires par la formule

$$r\,d^2r\,d\theta - 2\,dr^2\,d\theta - r^2\,d\theta^3 = 0.$$

Applications. — La spirale logarithmique a pour équation

$$r = e^{k\theta},$$

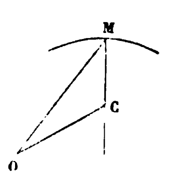
k désignant une constante; on en conclut l'expression suivante du rayon de courbure

$$R = \frac{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{1 - k^2}\,e^{k\theta};$$

le rayon de courbure est donc proportionnel à $e^{k\theta}$, c'est-à-dire au rayon vecteur r.

Soient (*fig.* 24) M un point de la spirale, O l'origine, C

Fig. 24.



le centre de courbure; le triangle MOC reste semblable à lui-même quand le point M se déplace, car la normale MC à la spirale fait un angle constant avec le rayon vecteur et MC reste proportionnelle à OM. L'angle OCM reste constant, et le rayon vecteur OC de la développée fait un angle constant avec la tangente à cette courbe, qui par suite est aussi une spirale logarithmique.

La spirale d'Archimède a pour équation

$$r = k\theta;$$

son rayon de courbure sera donné par l'équation

$$R = \frac{(k^2 + k^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{-2k^2 + k^2\theta^2}.$$

Cette formule peut s'écrire, en appelant N la normale,

$$\frac{N^3}{r^2 - 2k^2}.$$

Remarque. — On peut trouver directement le rayon de courbure en coordonnées polaires, en observant que l'angle de contingence $d\varepsilon$ est égal à $d\theta + dV$, V désignant l'angle que la tangente fait avec le rayon vecteur. Ainsi

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta + dV}{ds}$$

et, comme $\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr}$,

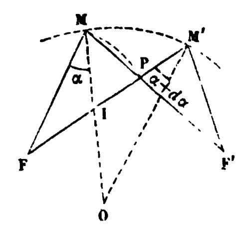
$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tang}\frac{r\,d\theta}{dr},$$

formule identique à (2) quand on effectue les calculs.

XIII. — Rayon de courbure en coordonnées bipolaires.

Soient (*fig.* 25) MM′ un arc de courbe; MF et MF′ les rayons vecteurs de M issus des foyers fixes F et F′, M′F et M′F′ les

Fig. 25.



rayons vecteurs du point voisin. Soient, de plus, $MF = u$, $MF' = u'$, $MM' = ds$, $FMO = \alpha$ l'angle que la normale fait avec MF, $F'MO = \alpha'$ l'angle que la normale fait avec MF′.

On a, en comparant la somme des angles des triangles IMF, IOM',

$$O = F - d\alpha, \qquad O = F' + d\alpha'$$

ou, en observant que l'arc MP décrit de F comme centre a pour valeurs $F u$ et $ds \cos\alpha$,

$$O = \frac{ds \cos\alpha}{u} - d\alpha, \qquad O = \frac{ds \cos\alpha'}{u'} + d\alpha'.$$

Soit R le rayon de courbure; on tire de là

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha}{u} = -\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha'}{u'} = +\frac{d\alpha'}{ds};$$

donc

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha}{u}\right) : \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha'}{u'}\right) = -\frac{d\alpha}{d\alpha'};$$

c'est de cette formule que l'on déduira la construction du rayon de courbure.

Ellipse. — Dans l'ellipse $\alpha = \alpha'$, on a donc

$$\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha}{u} + \frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha}{u'} = 0$$

ou

$$\frac{2}{R} = \cos\alpha\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u'}\right);$$

on peut encore écrire

$$\frac{2}{R} = \frac{\cos\alpha}{uu'}(u + u'),$$

ou, en appelant $2a$ le plus grand axe,

$$\frac{1}{R} = \frac{a\cos\alpha}{uu'}.$$

On peut encore transformer cette expression, quoiqu'elle donne une construction fort simple : on a, en appelant $2c$ la distance focale et $2b$ le petit axe,

$$4c^2 = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos 2\alpha,$$
$$4c^2 = (u + u')^2 - 4uu'\cos^2\alpha,$$

d'où

$$\cos^2\alpha = \frac{b^2}{uu'}, \qquad uu' = \frac{b^2}{\cos^2\alpha};$$

donc

$$R = \frac{b^2}{a\cos^3\alpha}.$$

Ovales de Descartes. — Les ovales de Descartes ont pour équation

$$u \mp au' = b;$$

on a, comme l'on sait (p. 30),

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = -\frac{du}{du'} = a,$$

d'où

$$\sin\alpha = a\sin\alpha',$$
$$\cos\alpha\, d\alpha = a\cos\alpha'\, d\alpha'.$$

La formule (1) devient alors

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha}{u}\right) : \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos\alpha'}{u'}\right) = -a\,\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{R}\sin(\alpha + \alpha') = \frac{\sin\alpha'\cos^2\alpha}{u} + \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha'}{u'}.$$

On en déduit la construction de R.

XIV. — Rayons de courbure en coordonnées multipolaires.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ les distances d'un point M à des centres fixes $P_1, P_2, \ldots, P_n$; une équation non identique

(1) $$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

entre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ représentera une courbe, dont le rayon de courbure peut se construire géométriquement, comme

nous allons le voir. Soit ds l'élément d'arc de la courbe (1); différentiant (1), on a

$$(2)\qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \frac{dp_i}{ds} \frac{dp_j}{ds} + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{d^2 p_i}{ds^2} = 0.$$

Or, en appelant x, y les coordonnées rectangulaires du point M et a_i, b_i celles du point P_i, on a

$$p_i^2 = (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2$$

et, en différentiant deux fois,

$$(3)\qquad p_i \frac{dp_i}{ds} = (x - a_i) \frac{dx}{ds} + (y - b_i) \frac{dy}{ds},$$

$$(4)\qquad p_i \frac{d^2 p_i}{ds^2} + \left(\frac{dp_i}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{ds^2} + (x - a_i) \frac{d^2 x}{ds^2} + (y - b_i) \frac{d^2 y}{ds^2}.$$

Si l'on divise l'équation (3) par p_i, elle exprime que $\frac{dp_i}{ds}$ est le cosinus de l'angle α_i que l'élément ds fait avec le rayon p_i; si l'on divise (4) par p_i, on aura alors

$$\frac{d^2 p_i}{ds^2} + \frac{1}{p_i} \cos^2 \alpha_i = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{\rho} \cos(\rho, p_i);$$

ρ désignant le rayon de courbure de la courbe (1), cette formule peut encore s'écrire

$$\frac{d^2 p_i}{ds^2} = \frac{1}{p_i} \sin^2 \alpha_i - \frac{\sin \alpha_i}{\rho}$$

et (2) devient

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} \left(\frac{\sin^2 \alpha_i}{p_i} - \frac{\sin \alpha_i}{\rho} \right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sum \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\sin^2 \alpha_i}{p_i}}{\sum \frac{\partial f}{\partial p_i} \sin \alpha_i}.$$

Si l'on applique cette formule à l'ellipse qui a pour équation

$$p_1 + p_2 = 2a,$$

on trouve

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\sin^2\alpha_1}{p_1} + \frac{\sin^2\alpha_2}{p_2}}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2}$$

ou bien

$$\rho = \frac{p_1 p_2(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)}{p_2\sin^2\alpha_1 + p_1\sin^2\alpha_2};$$

mais $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$: on peut donc écrire

$$\rho = \frac{2p_1p_2}{(p_2 + p_1)\sin\alpha_1}$$

ou

$$\frac{2}{\rho\sin\alpha_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2};$$

$\rho\sin\alpha_1$ est donc moyenne harmonique entre les rayons vecteurs p_1 et p_2. La même méthode s'applique à la lemniscate en écrivant son équation

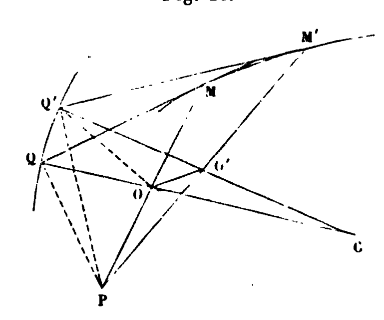
$$\log p_1 + \log p_2 = \text{const.},$$

aux ovales de Descartes, etc.

XV. — Rayon de courbure des podaires.

Soient (*fig.* 26) MM′ une courbe, QQ′ sa podaire relative au

Fig. 26.



pôle P; soient PM $= \rho$, R le rayon de courbure de MM′, ds son

élément d'arc, $d\varepsilon = \frac{ds}{R}$ son angle de contingence, O et O' les milieux de PM et de PM'.

QO et Q'O' sont les normales à la podaire, et son rayon de courbure R_1 sera donné par la formule

$$(1) \qquad R_1 = \frac{QQ'}{C};$$

on a de plus

$$(2) \qquad QQ' = 2d\varepsilon \tfrac{1}{2}\rho = \rho\, d\varepsilon,$$

or $Q'O' = PO'$; Q'O diffère de OQ ou PO d'un terme du deuxième ordre; donc les triangles Q'OO' et POO' sont égaux, en sorte que l'angle $O'Q'O = OPO' = d\omega$. On a, d'ailleurs,

$$(3) \qquad C = QOQ' - OQ'O' = 2d\varepsilon - d\omega;$$

(1), (2), (3) donnent alors

$$R_1 = \frac{\rho\, d\varepsilon}{2d\varepsilon - d\omega}$$

ou

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{\rho} - \frac{d\omega}{\rho\, d\varepsilon} = \frac{2}{\rho} - \frac{d\omega\, R}{\rho\, ds}.$$

En appelant μ l'angle que ds fait avec le rayon vecteur, on a

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\rho\, d\omega}{d\rho}, \qquad \frac{ds}{d\omega} = \sqrt{\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho^2},$$

$$\sin\mu = \frac{\rho\, d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}} = \rho\frac{d\omega}{ds}.$$

La formule précédente donne alors

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{\rho} - \frac{R}{\rho^2}\sin\mu$$

ou

$$\frac{2}{\rho} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{G}, \qquad \text{où} \qquad G = \frac{\rho^2}{R\sin\mu};$$

donc ρ est moyenne harmonique entre R_1 et $\frac{\rho^2}{R\sin\mu}\cdot$ On a, si l'on veut,

$$R_1 = \frac{\rho^2}{2\rho - R\sin\mu},$$

d'où résulte une construction simple du rayon de courbure de la podaire. Cela posé, on construira facilement le rayon de courbure de la strophoïde, de la lemniscate de Bernoulli, de la cissoïde, si l'on observe que ces courbes sont les podaires respectives de la parabole par rapport au pied de sa directrice, de l'hyperbole équilatère par rapport à son centre, de la parabole par rapport à son sommet.

La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une courbe a pour cercle osculateur le cercle dans lequel se transforme le cercle osculateur de la courbe proposée. Cette proposition résulte de ce que le cercle osculateur est celui qui passe par trois points infiniment voisins. Si l'on se rappelle que la courbe polaire réciproque d'une courbe donnée par rapport à un cercle est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette courbe, il en résultera généralement une construction simple du rayon de courbure de la podaire d'une courbe, quand on connaîtra celui de sa polaire réciproque.

XVI. — Quelques observations sur la théorie du contact.

Considérons l'équation d'une courbe mise sous la forme

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots;$$

la droite $y = a + bx$ est tangente à cette courbe; en effet, la différence des ordonnées de la droite et de la courbe est $x^2(c + dx + \dots)$; au point commun $x = 0$, $y = a$, cette différence est donc du second ordre : donc, etc.

La parabole $y = a + bx + cx^2$ aura avec la courbe, au point $x = 0$, $y = a$, un contact du second ordre; car la diffé-

rence des ordonnées des deux courbes est $x^3(d + \ldots)$, c'est-à-dire du troisième ordre. Lorsque c sera nul, la parabole osculatrice se réduira à une droite, et le point $x = 0$, $y = a$ sera un point d'inflexion.

La parabole $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ aura avec la courbe un contact du troisième ordre, etc.

Considérons maintenant l'équation d'une courbe sous la forme $f(x, y) = 0$. Si nous donnons à x et à y des accroissements ξ, η et si nous considérons ξ et η comme des coordonnées courantes, l'équation de la courbe prendra la forme suivante, où $f_{11}, f_{12}, f_{22}, \ldots$ désignent les dérivées de $f(x, y)$:

$$(1) \qquad \xi f_1 + \eta f_2 + \frac{1}{1.2}(f_{11}\xi^2 + 2f_{12}\eta\xi + f_{22}\eta^2) + \ldots = 0.$$

L'équation

$$(2) \qquad \xi f_1 + \eta f_2 = 0$$

est l'équation d'une tangente. En effet, les premiers membres de (1) et (2) ont mêmes dérivées partielles du premier ordre pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, donc mêmes $\frac{d\eta}{d\xi}$. La courbe

$$\xi f_1 + \eta f_2 + \frac{1}{1.2}(\xi^2 f_{11} + 2\eta\xi f_{12} + \eta^2 f_{22}) = 0$$

a avec (1) un contact du second ordre, car elles ont pour $\xi = 0$, $\eta = 0$, mêmes dérivées partielles premières et secondes, et par suite mêmes $\frac{d\eta}{d\xi}$, mêmes $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$, etc.

Plus généralement, considérons la courbe

$$(3) \qquad Af + B(\xi f_1 + \eta f_2) + C(\xi^2 f_{11} + 2\eta\xi f_{12} + \eta^2 f_{22}) = 0;$$

elle aura avec la courbe (1) un contact du second ordre, car les dérivées premières des premiers membres de ces équations seront proportionnelles, ainsi que leurs dérivées secondes pour $\xi = 0$, $\eta = 0$; les $\frac{d\eta}{d\xi}$ et $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ seront alors les mêmes, et il

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \begin{cases} u = \quad (\xi - X_1) X'_1 + (\eta - Y_1) Y'_1, \\ v = -(\xi - X_1) Y'_1 + (\eta - Y_1) X'_1; \end{cases}$$

les équations (1) deviennent alors

$$(3) \begin{cases} x = X + (\xi - X_1)(X'X'_1 + Y'Y'_1) + (\eta - Y_1)(Y'_1 X' - X'_1 Y'), \\ y = Y + (\xi - X_1)(X'_1 Y' - Y'_1 X') + (\eta - Y_1)(Y'_1 Y' + X'_1 X'); \end{cases}$$

ce sont les équations de la roulette.

Avant d'aller plus loin, observons que, R désignant le rayon de courbure d'une courbe en M, on a, en prenant l'arc pour variable et appelant x, y les coordonnées du point M,

$$x'y'' - y'x'' = \frac{1}{R},$$

$$y'y'' + x'x'' = 0;$$

d'où

$$(\alpha) \qquad y'' = \frac{x'}{R}, \qquad x'' = -\frac{y'}{R}.$$

Cela posé, appelons $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R_1}$ les courbures de la base et de la courbe roulante; en différentiant (2), on aura

$$u' = -(\xi - X_1)\frac{Y'_1}{R_1} + (\eta - Y_1)\frac{X'_1}{R_1} - X'^2_1 - Y'^2_1$$

ou bien

$$(4) \qquad \begin{cases} u' = \quad \dfrac{v}{R_1} - 1, \\ v' = -\dfrac{u}{R_1}. \end{cases}$$

Si l'on différentie alors les formules (1), on a, en vertu de (α),

$$x' = X' - \frac{1}{R}(uY' + vX') + u'X' - v'Y',$$

$$y' = Y' + \frac{1}{R}(uX' - vY') + u'Y' + v'X';$$

en vertu de (1) et (4), ces formules donnent

$$x' = X' - \frac{1}{R}(y - Y) - X' - \frac{y - Y}{R_1},$$
$$y' = Y' + \frac{1}{R}(x - X) - Y' + \frac{x - X}{R_1}$$

ou bien

(5) $$\begin{cases} -x' = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)(y - Y), \\ y' = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}\right)(x - X); \end{cases}$$

on tire de là

$$(y - Y)y' + (x - X)x' = 0,$$

ce qui prouve que :

La normale à la roulette passe par le point de contact de la roulante et de la base.

En ajoutant les formules (5), après les avoir élevées au carré, on a

$$x'^2 + y'^2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)^2 n^2,$$

n désignant la droite PM qui joint le point M de la roulette au point de contact de la roulante et de la base. On en conclut, en appelant σ l'arc de roulette,

(6) $$d\sigma = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) n\, ds;$$

en différentiant (5), on a

$$-x'' = G'(y - Y) + G(y' - Y'),$$
$$y'' = G'(x - X) + G(x' - X'),$$

G désignant, pour abréger, $\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}$. Multiplions la première par y', la seconde par x', et ajoutons; nous aurons

$$-y'x'' + x'y'' = G'[(y - Y)y' + (x - X)x'] + G[y'(y' - Y') + x'(x' - X')]$$

ou, en vertu de (5),

$$x'y'' - y'x'' = G^2[(x' - X')(y - Y) - (y' - Y')(x - X)]$$

ou, en éliminant encore x', y' au moyen de (5),

$$x'y'' - y'x'' = G^2[Y'(x - X) - X'(y - Y) - Gn^2],$$

c'est-à-dire

$$x'y'' - y'x'' = G^2(n\cos\varphi - Gn^2),$$

φ désignant l'angle que fait la droite n avec la normale commune à la base et à la roulante; il en résulte

$$\frac{x'y'' - y'x''}{d\sigma^3} = \frac{1}{G}\,\frac{n\cos\varphi - Gn^2}{n^3\,ds^3}$$

ou, en appelant ρ le rayon de courbure de la roulette,

$$\rho = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right)\frac{n^2}{\cos\varphi - \frac{n}{R} - \frac{n}{R_1}}.$$

Si l'on suppose $R_1 = \infty$ et si le point décrivant est sur une droite mobile roulante,

$$\rho = \frac{n^2}{R\cos\varphi - n};$$

mais dans ce cas $\varphi = \frac{\pi}{2}$, et l'on a $\rho = n$, ce qui est une propriété connue de la développante de la base.

XVIII. — Digression sur un théorème de Cinématique.

Théorème I. — *Quand une figure plane se déplace infiniment peu d'une manière quelconque dans son plan, il existe un point dont le déplacement est un infiniment petit du second ordre.*

Pour le démontrer, rapportons la figure mobile : 1° à deux axes fixes Ox et Oy situés dans son plan; 2° à deux axes $\omega\xi$, $\omega\eta$ mobiles, mais invariablement liés à cette figure mobile.

Les formules de transformation des coordonnées donneront

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \\ y = y_0 + \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi, \end{cases}$$

x_0, y_0 désignant les coordonnées du point ω et φ désignant l'angle de $\omega\xi$ avec Ox. On déduit de ces formules

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = dx_0 - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\,d\varphi, \\ dy = dy_0 + (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\,d\varphi. \end{cases}$$

(Nous n'avons pas différentié ξ et η, parce que, les axes mobiles étant liés à la figure mobile, les coordonnées ξ, η d'un point de cette figure restent constantes.) Ces équations peuvent d'ailleurs s'écrire

$$dx = dx_0 - (y - y_0)\,d\varphi,$$
$$dy = dy_0 + (x - x_0)\,d\varphi.$$

Si l'on suppose $dx = 0$, $dy = 0$, alors Δx et Δy seront du second ordre, le déplacement du point (x, y) sera du second ordre, et l'on aura

$$(3)\qquad \begin{cases} dx_0 - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\,d\varphi = 0, \\ dy_0 + (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\,d\varphi = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations détermineront un et un seul point (ξ, η), excepté toutefois si $d\varphi = 0$; ce point, dont on aura les coordonnées fixes x, y au moyen des équations (1), a un déplacement du second ordre.

Ce point est ce que l'on appelle le *centre instantané de rotation*.

Supposons ξ et η non plus invariables, mais donnés par les relations (3); le lieu des points ξ, η, obtenu en éliminant entre (3) le paramètre variable dont les variations déterminent le mouvement, est le lieu des centres instantanés dans la figure mobile : c'est une courbe C'. Les équations (3) représentent, si l'on veut, cette courbe C'. Les équations (1) représentent le lieu C du centre instantané dans le plan fixe, pourvu

que l'on y suppose ξ et η donnés par les formules (3). Différentions, en nous plaçant à ce point de vue, les formules (1): nous aurons

$$dx = dx_0 - (\xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi)\,d\varphi + (d\xi \cos\varphi - d\eta \sin\varphi),$$
$$dy = dy_0 + (\xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi)\,d\varphi + (d\xi \sin\varphi + d\eta \cos\varphi)$$

ou, en vertu de (3),

$$dx = d\xi \cos\varphi - d\eta \sin\varphi,$$
$$dy = d\xi \sin\varphi + d\eta \cos\varphi.$$

Multiplions la première par $\cos\varphi$, la seconde par $\sin\varphi$ et retranchons; nous aurons, dans le premier membre de l'équation résultante, la projection u du déplacement du point (x, y) sur l'axe $\omega\xi$

$$u = d\xi.$$

En appelant v la projection du même déplacement sur l'axe $\omega\eta$, on aurait $v = d\eta$: il en résulte que, quand on donne à la figure un déplacement infiniment petit, le centre instantané se déplace dans la figure mobile et dans le plan fixe de quantités égales en grandeur et en direction (aux termes du second ordre près); les différentielles des arcs de courbe C et C′ sont égales, leurs projections sont égales; donc ces deux courbes sont tangentes et roulent l'une sur l'autre sans glisser; donc :

Théorème II. — *Le déplacement d'une figure plane dans son plan peut toujours s'effectuer en faisant rouler sans glissement une courbe invariablement liée à la figure mobile sur une courbe fixe, et cela d'une seule manière.*

Car : 1° le centre instantané de rotation est bien déterminé; 2° quand deux courbes roulent l'une sur l'autre, le point de contact a un déplacement infiniment petit du second ordre; il est, par suite, le centre instantané de rotation (cela résulte de la définition même du contact du premier ordre); il y a des cas où le centre instantané pourra être rejeté à l'infini. Il y a plus, si $d\varphi$ est toujours nul, les axes mobiles resteront toujours

parallèles à eux-mêmes ; il n'y aura plus de centre instantané, et le mouvement sera un mouvement de *translation*.

COROLLAIRE I. — *Quand une figure se meut dans son plan, les normales à toutes les courbes décrites par les différents points de la figure mobile passent par un point fixe* (*le centre instantané de rotation*).

COROLLAIRE II. — *Pour trouver le point où une courbe invariablement liée à la figure mobile touche son enveloppe on cherche le centre instantané de rotation, et de ce centre on abaisse une normale sur la courbe enveloppante : le pied de cette normale est le point cherché.*

Pour trouver le centre instantané, d'après ce qui vient d'être dit, il suffit de savoir mener la normale à deux courbes décrites par des points différents de la figure mobile. Si, par exemple, une droite de longueur constante a ses extrémités sur deux droites rectangulaires, le centre instantané s'obtiendra en menant par les extrémités A, B de cette droite des perpendiculaires OA, OB sur les deux droites fixes : le point O de rencontre de ces deux droites sera le centre instantané. Soit M un point de la droite AB ; il engendre une ellipse : MO sera la normale à cette ellipse au point M.

XVIII. — Sur les épicycloïdes.

L'*épicycloïde* est une roulette engendrée par un point de la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur un autre cercle fixe. L'épicycloïde porte le nom d'*hypocycloïde* quand le cercle mobile est intérieur au cercle fixe.

Soient R le rayon du cercle fixe, r celui du cercle mobile considéré comme positif dans l'épicycloïde ordinaire et comme négatif dans l'hypocycloïde ; soit A le point décrivant dans la position qu'il occupe lorsqu'il est le point de contact du cercle roulant et du cercle fixe. Prenons pour axe des x la

droite qui joint le centre O du cercle fixe au point A; désignons par α l'angle dont a tourné le centre du cercle mobile quand le point décrivant s'est transporté de A en une position M quelconque; par x, y les coordonnées du point M; posons enfin

$$\beta = \frac{\alpha R}{r};$$

le théorème des projections fournira très simplement les relations (*fig.* 27)

$$(1) \quad \begin{cases} x = (R + r)\cos\alpha - r\cos(\alpha + \beta), \\ y = (R + r)\sin\alpha - r\sin(\alpha + \beta). \end{cases}$$

La construction du rayon de courbure et de la normale à cette courbe découle des formules du paragraphe précédent : ainsi la normale au point M passe par le point de contact des deux cercles, et le rayon de courbure ρ est donné par la formule

$$\rho = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{\cos\varphi - \frac{n}{R} - \frac{n}{r}}.$$

Dans le cas actuel, cette formule se simplifie; on a, en effet,

$$\cos\varphi = \frac{n}{2r},$$

et l'on trouve, au signe près,

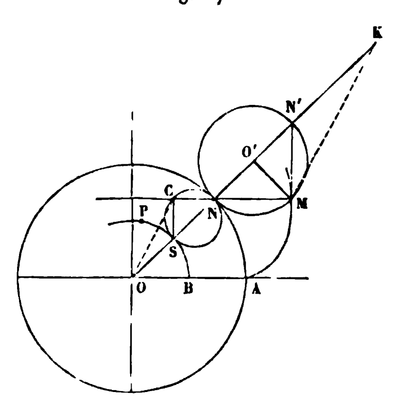
$$\rho = n + \frac{nR}{R + 2r},$$

ce qui donne une construction bien simple du rayon de courbure ρ; on voit qu'il suffit de prolonger la normale n d'une quantité $\frac{nR}{R + 2r}$, que l'on construira comme il suit :

Soient (*fig.* 27) O' le centre du cercle mobile, N le point de contact des deux cercles; on prendra $NK = 2r + R$ ou, si l'on veut, on prolongera le diamètre du point N de R, on joindra MK, on mènera OC parallèle à MK, et le point C sera le centre de courbure de l'épicycloïde, car $NC = \frac{nR}{R + 2r}$.

Par le point C, menons CS perpendiculaire sur CN; il est facile de voir, par la comparaison des triangles CNS, N'NM, que NS est constant et égal à $\frac{2Rr}{R+2r}$. On a alors $OS = \frac{R^2}{R+2r}$, de sorte que $\frac{NS}{OS} = \frac{2r}{R}$; le système des deux cercles, ayant pour rayons $\frac{NS}{2}$ et OS, est donc semblable au système des cercles proposés, et il est facile de voir que l'arc BS est égal à

Fig. 27.



l'arc CN. Si donc on prend BP égal à la demi-circonférence du cercle SCN, l'arc CSN sera égal à l'arc NA; le point C engendrera alors une épicycloïde semblable à la première. Donc :

La développée d'une épicycloïde est une autre épicycloïde semblable à la première.

Si, dans les formules (1), que nous écrirons

$$x = (R+r)\cos\alpha - r\cos\alpha\,\frac{R+r}{r},$$

$$y = (R+r)\sin\alpha - r\sin\alpha\,\frac{R+r}{r},$$

on fait une transformation de coordonnées, en faisant tourner

les axes de l'angle $\pi \frac{r}{R}$, on trouve

$$x = (R + r) \cos\left(\alpha + \pi \frac{r}{R}\right) - r \cos\left(\alpha \frac{R + r}{r} - \pi \frac{r}{R}\right),$$
$$y = (R + r) \sin\left(\alpha + \pi \frac{r}{R}\right) - r \sin\left(\alpha \frac{R + r}{r} + \pi \frac{r}{R}\right),$$

et, si l'on fait $\alpha + \pi \frac{r}{R} = \alpha'$, on a

$$x = (R + r) \cos\alpha' - r \cos\left(\pi + \alpha' \frac{R + r}{r}\right),$$
$$y = (R + r) \sin\alpha' - r \sin\left(\pi + \alpha' \frac{R + r}{r}\right).$$

Or les équations d'une épicycloïde engendrée par un cercle de rayon $-r$ roulant sur un cercle de rayon $R + 2r$ sont

$$x = (R + r) \cos\alpha' + r \cos\alpha' \frac{R + r}{r},$$
$$y = (R + r) \sin\alpha' + r \sin\alpha' \frac{R + r}{r};$$

elles coïncident avec les précédentes, d'où il résulte que :

Toute épicycloïde peut être engendrée de deux manières en faisant rouler un cercle sur un autre.

On voit que l'épicycloïde a pour tangente la droite MN' qui l'enveloppe; il est facile de voir que c'est le diamètre d'un cercle dont le rayon est $2r$ et qui roule sans glisser sur le cercle fixe. Ainsi :

L'épicycloïde est l'enveloppe du diamètre d'un cercle mobile qui roule sur un autre sans glisser.

Citons encore la proposition suivante de Chasles :

Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une épicycloïde est une autre épicycloïde.

XX. — Sur les courbes remarquables de la famille épicycloïdale.

Quand le rapport $\frac{r}{R}$ est commensurable, l'épicycloïde est évidemment une courbe algébrique.

1° Quand $R = r$, on a

$$x = 2R\cos\alpha - R\cos 2\alpha,$$
$$y = 2R\sin\alpha - R\sin 2\alpha$$

ou, en transformant les coordonnées,

$$x = (2R - 2R\cos\alpha)\cos\alpha,$$
$$y = (2R - 2R\cos\alpha)\sin\alpha;$$

si l'on regarde α comme un angle polaire et si l'on désigne par r le rayon vecteur, on a

$$r = 2R - 2R\cos\alpha,$$

ce qui est l'équation d'une conchoïde de cercle : cette conclusion est évidente par des considérations synthétiques.

2° Quand $r = -\frac{1}{2}R$, on a une ligne droite : c'est là un théorème de Lahire, bien connu du lecteur.

3° Nous examinerons le cas où $r = -\frac{R}{4}$; les équations de la courbe sont

$$x = 3r\cos\alpha + r\cos 3\alpha,$$
$$y = 3r\sin\alpha - r\sin 3\alpha:$$

si l'on observe que

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha,$$

et que

$$\sin 3\alpha = 3\cos\alpha^2\sin\alpha - \sin^3\alpha,$$

on trouve

$$x = r(3\cos\alpha + \cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 3\cos^3\alpha)$$

ou

$$x = 4r\cos^3\alpha, \qquad y = 4r\sin^3\alpha;$$

donc

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (4r)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est l'équation de l'enveloppe d'une droite de longueur constante $4r$ qui s'appuie sur deux droites rectangulaires, ce dont la Géométrie pure rend compte très simplement.

Cette courbe est semblable à la développée d'une ellipse dont les axes tendraient de plus en plus à devenir égaux; elle est du sixième degré, comme la développée de l'ellipse.

4° Si l'on a $r = -\frac{R}{3}$, on obtient ce que l'on appelle l'*hypocycloïde* à trois rebroussements, courbe devenue célèbre par les travaux de M. Cremona (*Journal de Crelle,* t. **64**. *Voir* aussi, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* un article de M. Laguerre et un autre de Painvin; 1870).

Les équations de cette courbe sont

$$x = r(2\cos\alpha + \cos 2\alpha),$$
$$y = r(2\sin\alpha - \sin 2\alpha),$$

d'où l'on tire

$$(x^2+y^2)^2 + 8rx(3y^2 - x^2) + 18r^2(x^2+y^2) - 27r^4 = 0;$$

quand on prend le triangle qui a pour sommet les trois rebroussements de la courbe pour triangle de référence, on trouve pour équation ordinaire

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 = 2xyz(x+y+z);$$

et pour équation tangentielle,

$$(\xi + \eta + \zeta)^3 = 27\,\xi\eta\zeta.$$

On sait que les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'un cercle sur les côtés d'un triangle inscrit sont sur une droite que l'on appelle quelquefois la *droite de Simson.*

L'enveloppe des droites de Simson est une hypocycloïde à trois rebroussements.

XXI. — Cycloïde et développante de cercle.

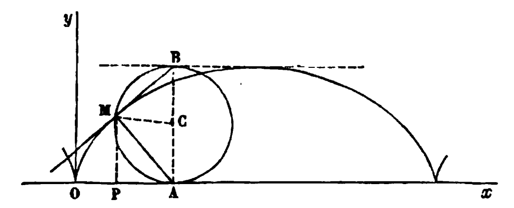
Quand $R = \infty$, l'épicycloïde devient une *cycloïde,* et, quand $r = \infty$, elle dégénère en développante du cercle R.

Ainsi *la cycloïde est la courbe engendrée par un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur une droite fixe.*

Nous avons déjà étudié un grand nombre de propriétés de cette courbe sans en faire connaître la génération.

Prenons (*fig.* 28) pour axe des x la droite fixe sur laquelle

Fig. 28.



roule le cercle générateur, et pour origine O le point où la cycloïde rencontre l'axe des x, en sorte que O soit le point où le cercle générateur touche Ox quand le point décrivant est sur l'axe des x.

Les coordonnées étant rectangulaires, appelons u l'angle que fait le rayon CM du cercle générateur avec la direction CA : c'est l'angle dont le cercle a tourné depuis qu'il a quitté son point de contact O avec Ox. Soient $OP = x$, $PM = y$, les coordonnées du point M de la cycloïde, a le rayon du cercle générateur; l'inspection de la figure donne

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u).$$

Résumons les principales propriétés de la courbe :

1° La normale en M passe par le point de contact A du cercle générateur et de la base Ox (p. 131).

2° MB est la tangente.

3° Le rayon de courbure est double de la normale MA (p. 101).

4° La développée de la cycloïde est une autre cycloïde égale et semblablement placée ; ses sommets coïncident avec les points où la cycloïde proposée rencontre sa base (p. 111).

5° Les points où la cycloïde rencontre sa base sont des points de rebroussement. La courbe se compose d'ailleurs d'une infinité de branches égales, placées les unes à la suite des autres.

6° Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la cycloïde est une cycloïde.

N. B. — La propriété 4° se démontre géométriquement avec la plus extrême facilité.

XXII. — Épicycloïdes allongées ou raccourcies.

L'épicycloïde allongée ou raccourcie est engendrée par un point du plan d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle fixe. Les propriétés de ces courbes résultent des considérations développées aux paragraphes précédents ; leur étude est du domaine de la Mécanique. Toutefois nous ferons observer que parmi ces courbes se trouve l'ellipse qui est engendrée par un point du plan d'un cercle mobile qui roule intérieurement sur un cercle de rayon double ; on déduit de là un moyen nouveau de construire le rayon de courbure de l'ellipse. Cette propriété se démontre géométriquement avec la plus grande facilité, en s'appuyant sur le théorème de Lahire et sur cette propriété de l'ellipse, qu'elle peut être engendrée par un point invariablement lié à une droite de grandeur constante qui glisse entre deux droites rectangulaires.

La cycloïde allongée ou raccourcie a quelquefois reçu le nom de *trochoïde ;* l'épicycloïde allongée ou raccourcie s'est aussi appelée *épitrochoïde* ou *hypotrochoïde*.

Soient R le rayon du cercle de base ; r le rayon du cercle roulant, considéré comme positif dans l'épitrochoïde et comme négatif dans l'hypotrochoïde ; l la distance du point qui décrit la roulette au centre du cercle roulant. Nous supposerons les cercles en contact sur la partie positive de l'axe des x : le point décrivant sera donc situé sur l'axe des x ; l sera considéré comme de même signe que r ou de signe contraire, suivant que le point décrivant sera, par rapport au centre du cercle roulant, du même côté ou non que le point de contact ; soit enfin α l'angle dont le cercle roulant a tourné. Les coordonnées d'un point de la roulette seront données par les formules

$$x = (R + r)\cos\alpha - l\cos\beta,$$
$$y = (R + r)\sin\alpha - l\sin\beta,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\beta = \alpha + \frac{R\alpha}{r}.$$

Quand $\frac{R}{r}$ sera commensurable, la roulette sera une courbe algébrique. Quand $\beta = -\alpha$ ou $R = -2r$, on a une ellipse, comme on l'a observé plus haut.

EXERCICES ET NOTES.

1. Trouver le lieu des centres et des foyers des courbes du second degré qui ont entre elles en un point donné un contact du troisième ordre.

2. Trouver le lieu des foyers des paraboles qui ont entre elles en un point donné un contact de second ordre.

3. Si l'on considère une conique et son cercle osculateur, la tangente commune et la corde commune sont également inclinées sur les axes : en profiter pour construire le cercle osculateur.

4. Trouver sur une courbe les points pour lesquels il existe

deux hyperboles équilatères ayant avec la courbe un contact du troisième ordre.

5. Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères, ayant avec une parabole un contact du troisième ordre.

6. On appelle points *Steiner* d'une courbe ceux où elle est touchée par une conique suivant un contact de sixième ordre (*voir* LEMONNIER, *Thèses*) : trouver le caractère de ces points.

7. Trouver l'équation de la conique qui, en un point donné d'une courbe, a avec elle un contact du quatrième ordre ou de la parabole qui a avec elle un contact du troisième ordre.

8. On appelle *développoïde* d'une courbe l'enveloppe des droites qui la rencontrent sous un angle constant (LANCRET, *Savants étrangers*, 1811; RÉAUMUR, *Mém. Acad. des Sciences,* 1709; HATON, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 2e année). Soient α l'angle constant, ρ le rayon de courbure de la courbe, ds son arc élémentaire, ρ' le rayon de courbure de la développoïde; on a

$$\rho' = \rho \sin\alpha + \frac{\rho\, d\rho}{ds}\cos\alpha.$$

(HABICH, *les Mondes,* t. XIX.)

9. Trouver les développoïdes de la spirale logarithmique (*voir* l'exemple précédent).

10. On peut généraliser la notion de développée comme il suit : considérons une courbe S et sa tangente TM en M ; soient I et J deux points fixes, soit NM la droite conjuguée harmonique de MT par rapport à MI et MJ : trouver l'enveloppe des droites MN. (Quand I et J sont les ombilics du plan, l'enveloppe en question est la développée de la courbe.) Application à l'ellipse. Cas où les deux points fixes I et J sont les foyers.

11. L'équation de la lemniscate de Bernoulli étant

$$(x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0 \qquad \text{ou} \qquad r^2 = a^2\cos 2\theta,$$

son rayon de courbure est $\dfrac{a^2}{3r}$, l'équation de sa développée

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4a^2}{9}.$$

12. L'équation de la parabole semi-cubique étant $3ay^2 = 2x^3$, son rayon de courbure est

$$\sqrt{\frac{(2a+3x)^3 x}{3a^2}};$$

l'équation de sa développée est

$$3ay^2 = -2x^3.$$

13. La chaînette

$$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

a pour rayon de courbure $\frac{y^2}{2m}$. On a

$$\frac{ds}{dx} = \frac{y}{m}.$$

14. Dans l'hyperbole équilatère, le rayon de courbure est la moitié de la corde normale.

15. Voici quelques formules relatives aux coordonnées tangentielles calculées par M. Painvin :

Soient u, v les coordonnées tangentielles d'une tangente à une courbe; U, V les coordonnées courantes; on a les formules suivantes :

Équation du point de contact :

$$(U-u)dv - (V-v)du = 0.$$

Coordonnées x, y ordinaires du point de contact :

$$x = \frac{dv}{u\,dv - v\,du}, \qquad y = -\frac{du}{u\,dv - v\,du}.$$

Élément d'arc :

$$ds = \sqrt{u^2+v^2}\,\frac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

Coordonnées u_1, v_1 de la normale :

$$u_1 = \frac{v(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv}, \qquad v_1 = -\frac{u(u\,dv - v\,du)}{u\,du + v\,dv}.$$

Rayon de courbure :

$$R = (u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{dv\,d^2u - du\,d^2v}{(u\,dv - v\,du)^2}.$$

16. Voici d'autres formules du même auteur; quelques-unes étaient déjà données ailleurs. Soient p la distance de l'origine à la tangente

à une courbe, α l'angle que la normale fait avec l'axe des x; on a, en employant les notations du numéro précédent,

$$u = \frac{\cos\alpha}{p}, \quad v = \frac{\sin\alpha}{p}, \quad p^2 = \frac{1}{u^2+v^2}, \quad \tang\alpha = \frac{v}{u},$$

$$x = p\cos\alpha - \frac{dp}{d\alpha}\sin\alpha, \quad y = p\sin\alpha + \frac{dp}{d\alpha}\cos\alpha,$$

$$ds = p\,d\alpha + d\,\frac{dp}{d\alpha},$$

$$\mathrm{R} = p + \frac{d^2p}{d\alpha^2},$$

$$u_1 = -\sin\alpha : \frac{dp}{d\alpha}, \quad v_1 = \cos\alpha : \frac{dp}{d\alpha}.$$

17. Si l'on considère deux courbes de grandeur et de forme constantes, tournant autour de points fixes O et O′ situés dans leur plan et invariablement liés à ces courbes, si de plus ces courbes sont constamment tangentes, de telle sorte que, M désignant le point de contact actuel, N et N′ les points de contact à un autre instant, on ait toujours arc MN = arc MN′, on dira que les courbes sont *syntrépentes;* une courbe qui a pour syntrépente une courbe égale est dite *isotrépente.* Soit $OO' = k$; prouver que l'équation des isotrépentes en coordonnées polaires est

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\mathrm{F}(r, k-r)},$$

F désignant une fonction symétrique de r et $k-r$.

(Miquel, *Journal de Liouville,* t. II, 1e série.)

18. Le lieu des sommets des angles constants circonscrits à une épicycloïde est une épitrochoïde.

19. Si des rayons lumineux parallèles viennent se réfléchir sur une circonférence, l'enveloppe des rayons réfléchis sera une épicycloïde.

(Lhopital, *Analyse des infiniment petits.*)

20. L'enveloppe des rayons lumineux émanés d'un point fixe et réfractés par une courbe plane C située dans un même plan avec le point lumineux est la développée de l'enveloppe de cercles ayant leurs centres sur la courbe C. Soient M le centre de l'un d'eux, L le point lumineux, n l'indice de réfraction : son rayon sera $\frac{\mathrm{ML}}{n}$.

21. Par un point fixe on mène des rayons vecteurs égaux et parallèles aux rayons de courbure d'une courbe fixe C ; le lieu des extrémités de ce rayon est une courbe C′ dont on demande l'expression du rayon de courbure, en fonction du rayon de courbure et de l'arc de la courbe proposée C.

22. Le limaçon de Pascal a pour équation polaire

$$r = a(1 - \cos\theta) :$$

c'est donc une conchoïde de cercle. Sa développée et sa développante sont des limaçons de dimensions linéaires trois fois plus petites et trois fois plus grandes : la construction du rayon de courbure est fort simple.

23. Un cercle est rencontré par une courbe C de degré m en des points $a_1, a_2, \ldots$; on mène les normales à la courbe C en ces points, elles rencontrent une transversale passant par le centre du cercle aux points $p_1, p_2, \ldots$. Prouver que

$$\frac{1}{a_1p_1} + \frac{1}{a_2p_2} + \frac{1}{a_3p_3} + \ldots = 0 ;$$

déduire de là un moyen de construire le rayon de courbure d'une courbe algébrique.

(Liouville, *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1re série.)

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES POINTS SINGULIERS.

I. — But et utilité de la théorie des points singuliers.

Les théories que nous avons exposées dans les Chapitres précédents ne s'appliquent pas aux points des courbes que nous avons appelés *singuliers*.

Ces points sont ceux où l'ordonnée y d'une courbe, considérée comme fonction de son abscisse, n'est pas développable par la formule de Taylor. Ils sont donc caractérisés par ce fait que y ou l'une de ses dérivées cesse d'être finie ou continue.

Toutefois nous ne considérerons pas comme nécessairement singuliers : 1° les points situés à l'infini dans des circonstances qui seront mentionnées plus loin; 2° ceux où l'on aurait $\frac{dy}{dx} = \infty$, si cette circonstance disparaît par une transformation de coordonnées.

Dans cet ordre d'idées, les points d'inflexion où une droite a avec la courbe un contact du second ordre ne sont pas singuliers, pas plus que les sommets où la courbe a avec un cercle un contact du troisième ordre.

Cependant nous verrons que, par rapport aux coordonnées tangentielles, les points d'inflexion jouent le rôle que les tangentes aux points de rebroussements jouent par rapport aux coordonnées cartésiennes, et, à ce point de vue, on les range parmi les singularités des courbes planes.

Nous ferons, dans ce Chapitre, une étude détaillée des points singuliers, d'abord parce qu'il convient de revenir sur les rai-

sonnements faits, en excluant systématiquement ces points, et ensuite parce que les courbes douées de points singuliers jouissent de propriétés remarquables qui en simplifient la théorie, contrairement à ce que l'on pourrait croire au premier abord.

II. — Digression sur une question d'Algèbre (solution de M. Minding).

Nous allons nous proposer de résoudre la question suivante, indispensable pour faire une bonne théorie des points singuliers :

Étant donnée une équation entre deux variables

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

dans laquelle f est une fonction entière ou, plus généralement, une fonction développable suivant les puissances entières de x et y, déterminer les ordres des racines y de cette équation par rapport à x, quand on y suppose x et y infiniment petits (bien entendu, on suppose que, pour $x = 0$, y est nul; ou, si l'on veut, f ne contientpas de terme indépendant de x et y).

On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$X_0 y^{m_0} + X_1 y^{m_1} + X_2 y^{m_2} + \ldots + X_i y^{m_i} + \ldots = 0,$$

X_0, X_1, ... désignant des polynômes en x (ou des séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de x) dans lesquels nous supposerons que les puissances de x les moins élevées sont respectivement x^{n_0}, x^{n_1}, ..., x^{n_i}, ...; nous supposerons d'ailleurs

$$m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_i < \ldots.$$

Posons $y = \alpha x^s$; nous aurons, en supposant α fini,

$$X_0 \alpha^{m_0} x^{m_0 s} + X_1 \alpha^{m_1} x^{m_1 s} + \ldots + X_i \alpha^{m_i} x^{m_i s} + \ldots = 0 \tag{2}$$

ou encore

$$(3)\quad \alpha^{m_0} + \frac{X_1}{X_0}\alpha^{m_1}x^{(m_1-m_0)s} + \ldots + \frac{X_i}{X_0}\alpha^{m_i}x^{(m_i-m_0)s} + \ldots = 0;$$

les ordres infinitésimaux des divers termes de cette formule sont respectivement

$$0,\quad n_1 - n_0 + s(m_1 - m_0),\quad \ldots,\quad n_i - n_0 + s(m_i - m_0),\quad \ldots$$

ou bien

$$(4)\quad \begin{cases} 0,\quad (m_1 - m_0)\left[s - \dfrac{n_0 - n_1}{m_1 - m_0}\right],\quad \ldots, \\ \quad (m_i - m_0)\left[s - \dfrac{n_0 - n_i}{m_i - m_0}\right],\quad \ldots. \end{cases}$$

Soit σ la plus grande des quantités

$$\frac{n_0 - n_1}{m_1 - m_0},\quad \frac{n_0 - n_2}{m_2 - m_0},\quad \ldots,\quad \frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0},\quad \ldots,$$

plusieurs d'entre elles pouvant être égales d'ailleurs : la suite aura tous ses termes positifs ou nuls si l'on prend $s = \sigma$. Soit i le rang du dernier terme nul; si dans (3) on suppose $x = 0$, on aura une équation de la forme

$$(5)\quad \alpha^{m_0} + \ldots + G\alpha^{m_i} = 0.$$

Cette équation fait connaître les valeurs finies de α et, par suite, les racines de (1) d'ordre s; et même la limite du rapport $\frac{y}{x}$. Le nombre des racines de cette équation (5), différentes de 0, est $m_i - m_0$; c'est aussi le nombre des racines de (1), qui sont d'ordre

$$s = \sigma = \frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0}.$$

On voit enfin que (1) a m_0 racines d'ordre supérieur à σ.

Pour trouver les ordres des racines d'ordre supérieur à σ, divisons les deux membres de (2) par $X_i x^{m_i s}$; nous aurons

$$(6)\quad \alpha^{m_0}\frac{X_0}{X_i}x^{(m_0-m_i)s} + \ldots + \alpha^{m_i} + \ldots + \alpha^{m_j}\frac{X_j}{X_i}x^{(m_j-m_i)s} + \ldots = 0.$$

Les ordres des termes de cette équation sont

$$n_0 - n_i + s(m_0 - m_i),\quad \ldots,\quad 0,\quad \ldots,\quad n_j - n_i + s(m_j - m_i),\quad \ldots$$

ou

$$(7)\qquad \begin{cases} \left(s - \dfrac{n_i - n_0}{m_0 - m_i}\right)(m_0 - m_i), & \ldots,\quad 0,\quad \ldots, \\ \left(s - \dfrac{n_i - n_j}{m_j - m_i}\right)(m_j - m_i), & \ldots. \end{cases}$$

Soit σ' la plus grande des quantités $\frac{n_i - n_k}{m_k - m_i}$, dans lesquelles $k > i$, et soit

$$\sigma' = \frac{n_i - n_j}{m_j - m_i};$$

si l'on fait $s = \sigma'$, tous les termes de la suite (7) qui suivent o sont nuls ou positifs; je dis qu'il en est de même de ceux qui précèdent, il suffit pour cela de prouver que, si $k < i < j$, on a

$$\frac{n_i - n_k}{m_k - m_i} < \frac{n_i - n_j}{m_j - m_i}.$$

Or on a, d'après la définition de σ,

$$\frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} \geqq \frac{n_0 - n_k}{m_k - m_0}$$

ou, appelant ε une quantité positive,

$$\frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} = \frac{n_0 - n_k + \varepsilon}{m_k - m_0} = \frac{n_i - n_k + \varepsilon}{m_k - m_i};$$

donc, comme $m_k < m_i$,

$$(a)\qquad \frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} < \frac{n_i - n_k}{m_k - m_i};$$

mais $\frac{n_i - n_j}{m_j - m_i}$, ou σ', est plus grand que $\frac{n_0 - n_j}{m_j - m_0}$, et l'on peut poser

$$\frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} = \frac{n_0 - n_j + \varepsilon}{m_j - m_0},$$

d'où l'on tire

$$\frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} = \frac{n_i - n_j + \varepsilon}{m_j - m_i},$$

et, comme $m_j - m_i$ est positif,

$$\frac{n_0 - n_i}{m_i - m_0} > \frac{n_i - n_j}{m_j - m_i};$$

de cette formule et de (a) on déduit l'inégalité qu'il fallait établir.

Faisant donc $s = \sigma'$, puis $x = 0$, la formule (6) devient

$$\alpha^{m_i} + \ldots + G\alpha^{m_j} = 0;$$

il y a donc m_i racines d'ordre supérieur à σ' et $m_j - m_i$ racines d'ordre égal à σ'.

Si l'on divise alors tous les termes de (1) ou (2) par $X_j x^{sm_j}$, en raisonnant comme nous venons de le faire, on aura les racines d'ordre $m_k - m_j$, k désignant un nombre facile à déterminer comme i et j, et ainsi de suite.

III. — Méthode de Newton.

La méthode de Newton est l'interprétation géométrique de la méthode de Minding. Écrivons l'équation (1) sous la forme

$$\Sigma A x^i y^j = 0,$$

appelons μ l'ordre de y et considérons le groupe de termes de l'ordre le moins élevé; il devra contenir au moins deux termes

$$A x^i y^j, \quad B x^k y^l;$$

ces deux termes étant de même degré δ, on a

$$(p) \qquad i + \mu j = k + \mu l = \delta$$

ou

$$\mu = \frac{i - k}{l - j},$$

ce qui prouve que μ est commensurable. Ceci posé, considérons i et j comme les coordonnées d'un point et marquons tous les points i, j; à tous les termes de même degré correspondent des points en ligne droite en vertu de (p), et l'équation de cette droite, pour un degré δ, est

$$X + \mu Y = \delta.$$

Quand δ croît, la droite, pour une même valeur de μ, s'éloigne de l'origine; donc la droite qui contiendra les points i, j correspondant au degré minimum ne devra laisser aucun point marqué du côté de l'origine des coordonnées.

Donc, si l'on forme une ligne polygonale convexe, passant par des points marqués, dont les côtés laissent du côté opposé à l'origine des coordonnées tous les points marqués par lesquels ils ne passent pas, les côtés de cette ligne polygonale détermineront les points répondant à la question. Par exemple, soit A un côté de la ligne en question : supposons qu'il contienne les points (i, j), (i', j'), (i'', j''); on posera

$$i + \mu j = \delta, \qquad i' + \mu j' = \delta;$$

ces deux formules déterminent μ et δ, c'est-à-dire le degré de y relativement à x et le degré total des termes que l'on peut grouper de manière à obtenir des termes de (1) de degré minimum; (i, j), (i', j'), ... feront connaître les termes euxmêmes.

Il faut remarquer que, parmi les points (i, j), il y en aura nécessairement un sur l'axe des x et un sur l'axe des y, si l'équation (1) est irréductible. En effet, cette équation, ne contenant pas de terme indépendant de x et y, ne saurait avoir tous ses termes divisibles par x ou par y; il y aura donc nécessairement un terme indépendant de x et un terme indépendant de y; en d'autres termes, il existera un exposant i nul, ainsi qu'un exposant j nul, ce qui fournira bien un point à marquer sur chaque axe de coordonnées.

Ni la méthode de Minding ni celle de Newton, comme l'on voit, ne permettront de déterminer les ordres des racines

au moyen d'une formule générale. Chaque cas particulier exigera une discussion spéciale.

IV. — Caractères des points singuliers dans les courbes algébriques.

La discussion que nous allons entreprendre est due à Sturm; elle a été perfectionnée par Briot. Elle a été faite surtout en vue des courbes algébriques, mais elle s'appliquerait à toute courbe dont le premier membre pourrait être développé par la formule de Taylor.

Soit

$$(1) \qquad f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe que nous supposerons algébrique (ou telle que son premier membre soit développable par la formule de Taylor); soit, pour abréger,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \ldots;$$

si nous éprouvons le besoin de rendre cette équation homogène en introduisant la variable z, nous poserons en outre

$$f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_{13} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}, \quad \ldots.$$

Ceci posé, nous allons prouver que :

Si f_1 et f_2 sont différents de zéro en un point (x, y), ce point ne saurait être singulier, mais il pourra présenter une inflexion.

En effet, donnons à x et y les accroissements ξ et η; l'équation (1) deviendra

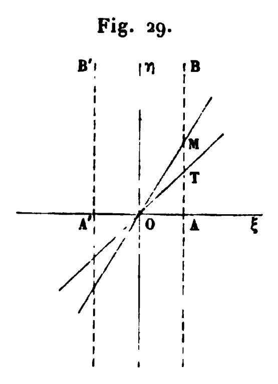
$$f(x+\xi, y+\eta) = 0,$$

ou bien, en observant que $f(x, y)$ est nul,

$$(2) \qquad \xi f_1 + \eta f_2 + \tfrac{1}{2}(f_{11}\xi^2 + 2f_{12}\xi\eta + f_{22}\eta^2) + \ldots = 0.$$

On peut regarder le point (x, y) comme origine de nouvelles coordonnées ξ, η. Nous allons chercher comment la courbe coupe deux parallèles AB, A′B′ menées à la distance ξ de l'axe

Fig. 29.



des y. A cet effet, puisque f_1 et f_2 ne sont pas tous deux nuls, supposons $f_2 \gtrless 0$ et posons

$$-\frac{f_1}{f_2} = \alpha, \qquad \frac{\eta}{\xi} = a.$$

La formule (2) pourra s'écrire

$$a - \alpha + \xi P = 0, \tag{3}$$

P désignant une fonction de ξ et de a, finie pour $\xi = 0$ et pour des valeurs finies de a. Si l'on suppose ξ très petit, en vertu de cette formule (3), a converge vers α, le coefficient angulaire $a = \frac{\eta}{\xi}$ de la sécante OM issue de l'origine O converge vers le coefficient $\alpha = -\frac{f_1}{f_2}$ de la tangente.

Si l'on prend la dérivée de l'équation (3), on a

$$1 + \xi \frac{\partial P}{\partial a} = 0.$$

Quand ξ est très petit, cette équation ne saurait avoir lieu, la dérivée $1 + \xi \frac{\partial P}{\partial a}$ conservant alors toujours le même signe; le premier membre de (3) ne s'annule qu'une fois : l'équa-

tion (1) a donc la seule racine $a = \alpha$ finie, et la courbe ne rencontre AB qu'en un seul point. Elle la rencontre d'ailleurs, car pour $a = \alpha$ le premier membre de (3) a le signe de P, et, en faisant $a = \alpha + h$ ou $a = \alpha - h$, ce premier membre sera, pour de petites valeurs de ξ, positif ou négatif; si, pour fixer les idées, P est positif, la racine de (3) sera comprise entre a et $a - h$ et par suite la courbe coupera AB au-dessous de OT: elle la couperait au-dessus dans le cas contraire. Une discussion toute semblable fournirait des résultats analogues relativement à la parallèle A′B′ correspondant aux valeurs négatives de ξ.

J'ai dit que, pour $a = \alpha$, le premier membre de (3) avait le signe de P; cela est vrai quand P n'est pas nul pour $a = \alpha$, mais on peut toujours supposer $P \gtrless 0$ pour $a = \alpha$, sans quoi toute l'équation serait divisible par $a - \alpha$; l'équation (1) serait divisible par $\xi f_1 + \eta f_2$ et ce facteur pourrait être supprimé: une droite ferait partie intégrante de la courbe que l'on discute. Suivant les cas, le point O pourra être un point ordinaire ou un point d'inflexion; ce sera un point d'inflexion si la courbe coupe AB et A′B′ de part et d'autre de la tangente AT. Ce dernier cas se présentera si P change de signe avec ξ, ce qui exige qu'il contienne ξ en facteur. Alors, en effet, supposant par exemple $P > 0$, pour $\xi > 0$, la courbe coupera AB au-dessous de AT, et, pour $\xi < 0$, P étant < 0, la courbe coupera A′B′ au-dessus de AT.

Ainsi le point O n'est pas un point singulier, puisque y est bien déterminé, ainsi que $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2}$, et par suite que $\frac{d^2y}{dx^2}, \cdots$, mais ce point peut être un point d'inflexion; donc:

Pour qu'un point soit singulier, il faut que l'on ait en ce point

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0.$$

En coordonnées homogènes, l'équation $f = 0$ peut se mettre sous la forme

$$xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0;$$

il en résulte qu'en un point singulier on a aussi $f_3 = 0$. Ainsi:

En coordonnées homogènes, la condition pour que le point (x, y, z) *soit singulier est*

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0.$$

C'est aussi la condition, en coordonnées trilinéaires, pour que l'on ait en x, y, z un point singulier, ce dont on peut se convaincre aisément en posant

$$x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p, \qquad y = \xi \cos\beta + \eta \sin\beta - q,$$
$$z = \xi \cos\gamma + \eta \sin\gamma - r,$$

et en observant que les équations $f = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$ entraînent $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$.

V. — Remarques.

Reprenons l'équation (2) du paragraphe précédent,

$$(2) \qquad \xi f_1 + \eta f_2 + \tfrac{1}{2}(f_{11}\xi^2 + 2 f_{12}\xi\eta + f_{22}\eta^2) + \ldots = 0.$$

L'équation $\xi f_1 + \eta f_2 = 0$ est celle de la tangente; on peut le vérifier en observant que cette droite coupe la courbe en deux points confondus à l'origine $\xi = 0, \eta = 0$. Cette tangente partage le plan en deux régions R_1 et R_2; dans la première $\xi f_1 + \eta f_2$ est positif, dans la seconde il est négatif.

En général, dans (2), les termes du second ordre, en ξ, η, donnent leur signe à toute la partie du second membre qui suit les termes du permier ordre (à moins que les termes du second ordre soient nuls en même temps que ceux du premier); pour un point de la courbe, $\xi f_1 + \eta f_2$ est de signe contraire aux termes du second ordre. Ces termes du second ordre ne changeant pas de signe, ceux du premier ne changent pas de signe non plus; donc, dans le voisinage du point (x, y), la courbe reste dans une même région R_1 ou R_2, c'est-à-dire dans un même côté de la tangente.

Ce raisonnement tombe en défaut quand les termes du second ordre peuvent s'annuler avec ceux du premier, c'est-

à-dire quand $\xi f_1 + \eta f_2$ divise les termes du second ordre.

Supposons que $\xi f_1 + \eta f_2$ divise les termes d'ordre $2, 3, \ldots, i$ sans diviser ceux d'ordre $i+1$; si l'on pose, pour abréger, $\xi f_1 + \eta f_2 = T$, on pourra mettre l'équation (2) sous la forme

$$T(1+\Omega) + \frac{(\xi f_1 + \eta f_2)^{(i+1)}}{1.2.3\ldots(i+1)} + \ldots = 0.$$

Plaçons-nous sur un point de la courbe, $T(1+\Omega)$ aura le signe de T, les termes suivants auront le signe du seul terme écrit, T sera de signe contraire à ce terme. Si ce terme est d'ordre pair, T, pour un point de la courbe, conservera son signe; la courbe est alors, dans le voisinage du point (x, y), dans la même région R_1 ou R_2. Si, au contraire, le terme considéré est d'ordre impair, T changera de signe avec η et ξ; la courbe traversera la tangente et passera de la région R_1 à la région R_2 : il y aura une inflexion. D'ailleurs la tangente $T=0$ a avec la courbe un contact d'ordre i, puisqu'en coupant la courbe par $T=0$ on trouve $i+1$ points d'intersection confondus en x, y.

Ainsi, *en appelant $i+1$ l'ordre du premier émanant de f qui ne l'annule pas avec l'émanant $\xi f_1 + \eta f_2$, la courbe a avec sa tangente en x, y un contact d'ordre i, et par suite une inflexion si $i+1$ est impair, pas d'inflexion (pour l'œil) si $i+1$ est pair.*

VI. — Points singuliers ordinaires.

Conservons les notations du paragraphe précédent. Pour que la courbe

(1) $$f(x, y) = 0$$

présente une singularité en x, y, il faut que

(2) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0.$$

Voyons maintenant si cette condition est suffisante. En don-

nant toujours à x et y les accroissements ξ, η, on a, en tenant compte de (1) et (2),

$$\tfrac{1}{2}(f_{11}\xi^2 + 2f_{12}\xi\eta + f_{22}\eta^2) + \ldots = 0;$$

l'équation doit nécessairement présenter un terme indépendant de ξ ou η, sans quoi elle serait divisible par une de ces variables et l'équation (1) ne serait pas irréductible. Nous supposerons que $f_{22} \gtrless 0$; divisant alors par $\frac{1}{2}\xi^2$, nous aurons

$$(3) \qquad f_{11} + 2af_{12} + a^2 f_{22} + \xi Q = 0,$$

Q désignant un polynôme qui reste fini pour $\xi = 0$, tant que a n'est pas infini. Nous distinguerons trois cas :

1° $f_{11} + 2af_{12} + a^2 f_{22}$ est décomposable en facteurs distincts réels : $f_{22}(a-\alpha)(a-\beta)$; (3) s'écrit alors

$$(4) \qquad f_{22}(a-\alpha)(a-\beta) + \xi Q = 0.$$

On peut supposer f_{22} positif; traçons les droites OT et OS (*fig.* 30) ayant pour coefficients angulaires α et β. On peut

Fig. 30.

supposer Q différent de zéro pour $a = \alpha$ ou $a = \beta$, sans quoi $f = 0$ ne serait pas une équation irréductible. Supposons, par exemple, $\alpha > \beta$ et Q positif pour $a = \alpha$. En faisant $a = \alpha$ et $a = \alpha - h$, le premier membre de (4) prend des signes contraires, si ξ est suffisamment petit. L'équation (4) a donc une racine a voisine de α, y a une valeur AM voisine de $a\xi = $ AT

et la courbe coupe AB dans le voisinage du point T (ici au-dessous du point T). On verrait de même que la courbe coupe AB dans le voisinage du point S. D'ailleurs, il n'y a pas d'autre point voisin de O sur la courbe et sur AB, car la dérivée du premier membre de (4) ou (3) se réduit à

$$2f_{12} + 2af_{22} + \xi \frac{\partial Q}{\partial a}$$

et ne s'annule qu'une fois pour des valeurs finies de a, quand ξ est très petit. On verrait de même que la courbe coupe A'B' en deux points voisins du point O; il serait d'ailleurs facile de dire si ces points sont au-dessus ou au-dessous de OS et de OT, qui, étant des limites de sécantes, sont évidemment des tangentes. Le point O est donc singulier et *deux* branches de courbe viennent s'y croiser: c'est un point *double* ou *nœud simple.*

2° Si $f_{11} + 2af_{12} + a^2 f_{22}$ n'est pas décomposable en facteurs réels, l'équation (3) conserve le signe de ce trinôme (qui ne s'annule jamais) pour de petites valeurs de ξ; il n'y a donc pas de points de la courbe dans le voisinage du point O qui est alors un point *isolé* ou *conjugué.*

3° Si $f_{11} + 2af_{12} + a^2 f_{22}$ est un carré parfait, alors

$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = 0,$$

et (3) peut s'écrire

$$(5) \qquad f_{22}(a - \alpha)^2 + \xi Q = 0.$$

Traçons la droite OT qui a pour coefficient angulaire α; a tend vers α pour $\xi = 0$; cette droite OT est donc une tangente. Si l'on fait $a = \alpha$, pour $\xi > 0$ le premier membre de (5) a le signe de Q; pour d'autres valeurs de a, il est positif; si donc Q est positif, il n'y a pas de rencontre de la courbe avec AB, mais certainement il y a alors rencontre avec A'B'; car, pour $a = \alpha$, le premier membre de (5) est négatif et, pour d'autres valeurs de a, il est positif; on peut donc dire qu'il y a au moins deux rencontres, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de la tangente,

sur A'B', et qu'il n'y en a que deux, si l'on observe que la dérivée du premier membre de (5) est $2f_{22}(a-\alpha)+\xi\,\frac{\partial Q}{\partial a}$, et ne s'annule qu'une fois pour de petites valeurs de ξ.

Nous avons supposé Q positif pour $a=\alpha$: on serait arrivé

Fig. 31.

à des résultats analogues en le supposant négatif. Mais, quand Q peut changer de signe avec ξ, il faut modifier notre raisonnement : on fait alors

$$Q = A + B\xi + C\xi^2 + \dots$$

et (5) devient

$$(6) \qquad f_{22}(a-\alpha)^2 + A\xi + B\xi^2 + \dots = 0.$$

Supposons seulement $A=0$, pour $a=\alpha$: alors le premier membre de (6) a le signe de B; si donc B est négatif, comme pour $a \gtrless \alpha$, ce premier membre a le signe +, la courbe rencontre AB et A'B' chacune en deux points; la courbe se compose en O de deux branches tangentes entre elles. Si B est positif, on ne peut plus rien affirmer, et il convient de modifier la théorie; posons alors

$$a = \alpha + \alpha'\xi,$$

la formule (6) deviendra

$$f_{22}\alpha'^2\xi^2 + (A_0 + A'_0\xi\alpha' + \dots)\xi + (B_0 + B'_0\xi\alpha' + \dots)\xi^2 + \dots = 0,$$

$A_0, B_0, \ldots$ désignant les valeurs de $A, B, \ldots$ pour $a = \alpha$; cette équation peut s'écrire, en divisant par ξ^2 et en observant que $A_0 = 0$,

$$(7)\qquad f_{22}\alpha'^2 + A'_0\alpha' + B_0 + \xi\left(\frac{A''_0}{2}\alpha'^2 + B'_0\alpha' + \ldots\right) + \ldots = 0.$$

Si le trinôme en α' indépendant de ξ est toujours positif, α' est imaginaire et O est un point isolé; si ce trinôme peut s'annuler, a prend deux valeurs réelles $\alpha + \alpha'\xi$ et $\alpha + \beta'\xi$, et la courbe se compose de deux branches situées de part et d'autre ou du même côté de la tangente commune, suivant que α' et β' sont de signes contraires ou de même signe.

Si le trinôme en α' a ses racines égales, l'équation (7) a deux racines égales : si le coefficient de ξ est positif quand ξ est négatif, a a alors deux valeurs de la forme

$$\alpha + (\alpha' + \varepsilon_1)\xi \quad \text{et} \quad \alpha + (\alpha' + \varepsilon_2)\xi,$$

ε_1 et ε_2 étant très petits par rapport à α'; la courbe se présente donc sous la forme de deux branches situées d'un même côté de la tangente commune, et il est clair qu'elle ne coupe qu'une des parallèles AB, A'B' : le point O est alors un *rebroussement* de *seconde espèce*. Ces conclusions sont en défaut quand $\frac{A''_0}{2} + B'_0\alpha' + \ldots$, coefficient de ξ, est nul; on voit comment on devrait d'ailleurs continuer la discussion.

En résumé, si f_{11}, f_{12}, f_{22} ne sont pas nuls à la fois, la courbe a en x, y un point singulier; ce point est alors dit *point singulier ordinaire*.

Si $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ n'est pas nul, deux branches de courbe, réelles ou imaginaires, se *coupent* en O et l'on a un point double *réel* ou *imaginaire;* si $f_{11}f_{22} - f_{12}^2$ est nul, on dit que l'on a un *rebroussement :* les deux branches de courbe passant en x, y sont tangentes.

VII. — Points singuliers extraordinaires.

Conservons toujours les mêmes notations que dans les paragraphes précédents. Si f_{11}, f_{12}, f_{22} sont nuls en même temps que f_1, f_2, f, le point (x, y) est encore un point singulier, comme nous allons le voir; on dit alors, pour des raisons que l'on comprendra plus loin, que le point singulier est *extraordinaire*. Pour discuter ce cas dans toute sa généralité, nous supposerons qu'ayant mis l'équation de la courbe sous la forme $f(x+\xi, y+\eta)=0$, on la développe par rapport aux puissances de ξ et η. On obtiendra un résultat de la forme

$$(1) \qquad \sum A\,\xi^i\eta^j = 0;$$

η aura alors diverses valeurs infiniment petites de divers ordres par rapport à ξ. On déterminera les ordres de ces diverses racines comme il a été expliqué (p. 149 et 152) : ayant adopté un ordre $\frac{\mu}{\nu}$ pour η, on décomposera le premier membre de (1) en groupes de termes de même ordre, et l'on fera

$$\xi = \pm u^\nu, \qquad \eta = a u^\mu, \qquad a = \frac{\eta}{\xi}.$$

L'équation (1), en divisant par une puissance convenable de u, prendra alors la forme

$$(2) \qquad \varphi(a) + u\chi(a) + u^2\psi(a) + \ldots = 0,$$

$\varphi(a)$, $\chi(a)$, $\psi(a)$ désignant des fonctions entières. Si l'on suppose ξ et par suite u très petits, l'équation (2) ou (1) de la courbe devient sensiblement $\varphi(a)=0$. Si a_0 est une racine réelle simple de $\varphi(a)=0$, le premier membre de (2) change de signe quand on remplace a par a_0+h et a_0-h, pourvu que ξ et par suite u soient assez petits. A cette racine correspond une branche de courbe et une seule, car la dérivée du premier membre de (2) est $\varphi'(a)+u\chi'(a)+\ldots$

et a le signe de $\varphi'(a)$, qui par hypothèse n'est pas nul; cette dérivée ne changeant pas de signe de $a_0 - h$ à $a_0 + h$, il ne peut y avoir qu'une racine de (2) dans cet intervalle [cette branche coupe d'ailleurs AB et A'B', si $\chi'(a_0)$ n'est pas nul].

Si a_0 est une racine multiple de $\varphi(a) = 0$, d'ordre de multiplicité p par exemple, (2) prendra la forme

$$(a - a_0)^p \, \theta(a) + u \, \chi(a) + u^2 \, \psi(a) + \ldots = 0.$$

La discussion n'offrira pas de difficulté si $\chi(a_0)$ est différent de zéro; mais, si $\chi(a_0) = 0$, on posera

$$a = a_0 + u a',$$

et l'on procédera comme on l'a indiqué pour la discussion d'un point ordinaire.

A un point de vue purement analytique, quand les dérivées du premier ordre de f sont nulles, le point (x, y) est un point double, et les tangentes au point double ont pour équation

$$\xi^2 f_{11} + 2\eta\xi f_{12} + \eta^2 f_{22} = 0,$$

ou, avec les axes primitifs,

$$(X - x)^2 f_{11} + 2(X - x)(Y - y) f_{12} + (Y - y)^2 f_{22} = 0.$$

En général, soit p l'ordre de la première différentielle de f qui ne s'annule pas. On aura symboliquement

$$f(x + \xi, y + \eta) = \frac{1}{1.2.3\ldots p} (\xi f_1 + \eta f_2)^{(p)} + \varepsilon,$$

ε désignant un infiniment petit de l'ordre $(p + 1)$; les points $(x + \xi)$, $(y + \eta)$ étant sur la courbe, on aura

$$(\xi f_1 + \eta f_2)^{(p)} + \varepsilon = 0.$$

Divisons par ξ^p, nous aurons

$$\left(f_1 + \frac{\eta}{\xi} f_2\right)^{(p)} + \varepsilon' = 0,$$

ε' s'annulant avec ξ; si l'on appelle a la limite du rapport $\frac{\eta}{\xi}$,

c'est-à-dire du coefficient angulaire de la droite joignant le point (x, y) au point $(x+\xi)$, $(y+\eta)$, on aura

$$(P) \qquad (f_1 + a f_2)^{(p)} = 0.$$

Cette équation montre que la courbe a p tangentes au point (x, y) et que leurs coefficients angulaires a sont donnés par la formule (P). L'équation des tangentes elles-mêmes sera donc

$$[(X-x)f_1 + (Y-y)f_2]^{(p)} = 0$$

et, en coordonnées homogènes,

$$[Xf_1 + Yf_2 + Zf_3]^{(p)} = 0.$$

Elles sont au nombre de p, réelles ou imaginaires, et l'on dit que le point (x, y) est *multiple d'ordre p*. Le nœud peut n'être pas apparent; c'est ce qui arriverait, par exemple, si deux branches de courbe imaginaires se croisaient en un point M d'une branche réelle; mais, *analytiquement*, le point présentera les caractères d'un point singulier. Ainsi, en général, *si un point (x, y) est multiple d'ordre p, toutes les dérivées de f, jusqu'à l'ordre $p-1$ inclusivement, sont nulles en ce point, et réciproquement d'ailleurs.*

Cette condition se traduit en coordonnées homogènes en disant qu'en un point multiple d'ordre p, toutes les dérivées d'ordre $p-1$ du premier membre de l'équation de la courbe, relatives à x, y, z, sont nulles.

En effet :

1° Si l'on a

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f = 0,$$

la dernière équation peut s'écrire

$$xf_1 + yf_2 + zf_3 = 0$$

et, en vertu des deux premières, elle devient $f_3 = 0$.

2° Si l'on a

$$f = 0, \qquad f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_{11} = 0, \qquad f_{12} = 0, \qquad f_{22} = 0,$$

on aura

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0;$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} xf_{11} + yf_{12} + zf_{13} &= 0, \\ xf_{21} + yf_{22} + zf_{23} &= 0, \\ xf_{31} + yf_{32} + zf_{33} &= 0, \end{aligned}$$

et, en vertu de $f_{11} = 0, f_{12} = 0, f_{22} = 0$, elles deviennent

$$f_{13} = 0, \qquad f_{23} = 0, \qquad f_{33} = 0,$$

et ainsi de suite.

Ce sont aussi les conditions pour qu'une courbe

$$f(x, y, z) = 0$$

donnée en coordonnées trilinéaires ait au point (x, y, z) *un point multiple d'ordre* p.

En effet, les coordonnées trilinéaires d'un point (x, y, z), sont liées aux coordonnées rectangulaires homogènes ξ, η, ζ, au moyen d'équations telles que

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta, \\ y &= a'\xi + b'\eta + c'\zeta, \\ z &= a''\xi + b''\eta + c''\zeta, \end{aligned} \right.$$

dont le déterminant n'est pas nul; on peut donc aussi exprimer ξ, η, ζ en fonctions linéaires et homogènes de x, y, z. Les formules relatives au changement de variable permettent de calculer les dérivées d'ordre $p - 1$ de f relatives à x, y, z en fonction des dérivées de f relatives à ξ, η, ζ, et cela sous forme homogène et linéaire, et *vice versa*. Donc, si les dérivées d'ordre $p - 1$ relatives à x, y, z sont nulles, celles qui sont relatives à ξ, η, ζ le sont aussi, et *vice versa*.

L'expression symbolique

$$(Xf_1 + Yf_2 + Zf_3)^{(p)}$$

est un covariant; par une substitution, telle que (1), elle se

trouve multipliée par le déterminant de la substitution élevé à une puissance convenable; on peut en conclure que

$$(Xf_1 + Yf_2 + Zf_3)^{(p)} = 0$$

est, en coordonnées trilinéaires, l'équation de l'ensemble des tangentes menées à la courbe $f = 0$ au point (x, y, z) singulier d'ordre p.

VIII. — Remarques.

Soit $(f_1 \xi + f_2 \eta)^{(p+1)}$ le premier émanant de f qui ne s'annule pas; il est facile de voir que

$$(f_1 \xi + f_2 \eta)^{(p+1)} = 0$$

est l'équation des tangentes au nœud et de trouver l'ordre de leur contact avec la courbe. En effet, l'équation de la courbe est

$$(f_1 \xi + f_2 \eta)^{(p+1)} + \varepsilon = 0,$$

ε désignant des termes d'ordre supérieur à $p + 1$. Si l'on prend des coordonnées polaires et si l'on pose

$$\xi = r \cos\theta, \qquad \eta = r \sin\theta,$$

l'équation de la courbe devient, après la suppression du facteur r^{p+1},

$$(f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta)^{(p+1)} + r\omega = 0,$$

ω désignant une quantité finie pour $r = 0$. On voit que la droite qui fait l'angle θ quelconque avec l'axe des x coupe la courbe en $p + 1$ points confondus fixes et en d'autres points variables; quand θ tend vers une valeur qui annule

$$(f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta)^{(p+1)},$$

une autre valeur de r au moins tend vers zéro : le rayon r correspondant devient donc tangent à la courbe; l'ordre de son contact dépendra du nombre des termes qui s'annuleront pour $(f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta)^{(p+1)} = 0$, c'est-à-dire du nombre des points d'intersection variables de la sécante qui devient tangente.

Pour savoir de quel côté la courbe est placée dans le voisinage du nœud par rapport à ses tangentes, on peut suivre le procédé que voici, plus simple que celui que nous venons d'exposer, mais qui a sur lui l'inconvénient de n'être pas toujours applicable. Supposons toujours que le premier émanant de f, qui ne s'annule pas identiquement, soit

$$(f_1\xi + f_2\eta)^{(p+1)};$$

soit T un de ses facteurs linéaires réels; mettant ce facteur en évidence dans tous les émanants, on résoudra l'équation de la courbe par rapport à ce facteur, et l'on aura

$$T - \Omega = 0.$$

On partagera le plan en deux régions R_1 et R_2 : dans l'une, T sera positif; dans l'autre, il sera négatif. Si Ω a toujours le même signe, il n'y aura de points de la courbe que dans l'une des régions R_1, R_2. Si Ω peut changer de signe, il y aura des points de la courbe dans les deux régions.

Il ne s'agit, bien entendu, que des points infiniment voisins du point (x, y).

IX. — Théorie des asymptotes.

On sait que l'on appelle *asymptote* d'une branche infinie d'une courbe une autre courbe dont celle-ci s'approche indéfiniment, de manière que la différence des ordonnées de ces courbes ait pour limite zéro ou, plus exactement, de manière que la distance d'un point de l'une de ces courbes à l'autre tende vers zéro. Nous ne nous occuperons ici que de la recherche des asymptotes rectilignes.

On sait que les coefficients angulaires c des asymptotes sont donnés par la formule $c = \lim \frac{y}{x}$, et que leurs ordonnées à l'origine l sont données par la formule $l = \lim(y - cx)$; les asymptotes parallèles à l'axe des y ont d'ailleurs pour abscisses les valeurs finies de x qui rendent y infini.

Occupons-nous d'abord de la recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y d'une courbe algébrique; à cet effet, ordonnons l'équation de la courbe par rapport aux puissances décroissantes de y; nous aurons

$$(1) \qquad X_0 y^m + X_1 y^{m-1} + X_2 y^{m-2} + \ldots + X_m = 0,$$

X_0, X_1, ... désignant des polynômes entiers en x; en divisant par y^m, on a

$$(2) \qquad X_0 + \frac{1}{y} X_1 + \frac{1}{y^2} X_2 + \ldots + \frac{1}{y^m} X_m = 0;$$

si l'on suppose $y = \infty$, cette équation se réduit à $X_0 = 0$, et les valeurs finies de x qui rendent y infini sont racines de l'équation $X_0 = 0$. Ainsi, au point de vue algébrique, la question est résolue; au point de vue géométrique, il convient d'examiner de quelle façon la courbe est placée par rapport à son asymptote.

1° Supposons que, pour la valeur a qui annule X_0, on ait $X_1 \gtrless 0$; alors on peut mettre l'équation (2) sous la forme

$$X_0 + \frac{1}{y}(X_1 + \varepsilon) = 0,$$

ε désignant une quantité que l'on pourra supposer moindre que X_1 en valeur absolue. On en tire

$$y = -\frac{X_1 + \varepsilon}{X_0};$$

alors la courbe proposée aura ses branches disposées, par rapport à l'asymptote, comme celles de la courbe

$$y = -\frac{X_1}{X_0}.$$

On voit que, si a est racine simple de $X_0 = 0$, la courbe aura deux branches situées de part et d'autre de l'asymptote; si, au contraire, a est racine double ou d'ordre de multiplicité pair, deux branches seront asymptotes d'un même côté.

2° Supposons que pour $x = a$ on ait non seulement $X_0 = 0$, mais encore $X_1 = 0$, on peut faire

$$x = a + \xi,$$
$$y = \frac{1}{\eta};$$

l'équation de la courbe se transforme alors en une autre entièreen ξ et η. On peut considérer ξ et η comme des coordonnées courantes : la nouvelle équation pourra alors être considérée comme celle d'une courbe c' qui passera par l'origine; on discutera la forme de cette courbe en appliquant les principes développés aux paragraphes précédents, elle pourra présenter une singularité, et de sa forme on déduira celle de la courbe proposée c en remarquant que l'ordonnée de cette dernière est l'inverse de l'ordonnée de la première correspondante à la même abscisse. Cette méthode s'applique, bien entendu, également au cas où X_1 ne serait pas nul en même temps que X_0.

Supposons, par exemple, que la courbe c' présente une branche unique traversant l'axe des x, la courbe proposée c présentera deux branches infinies asymptotes à l'axe des η ou à la droite $x = a$, situées l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'axe des x. Si la courbe c' présente une branche unique tangente à l'axe des x, la courbe c présentera deux branches infinies asymptotes à la droite $x = a$, situées du même côté de l'axe des x que la branche de la courbe c'.

Si la courbe c' présente un nœud simple, chaque branche du nœud donnera lieu à deux branches asymptotes à la droite $x = a$ appartenant à la courbe c. Un rebroussement donnera lieu ordinairement à deux branches infinies de c, asymptotes d'un même côté de la droite $x = a$, etc.

D'ailleurs nous allons exposer une méthode générale pour la recherche des asymptotes des courbes algébriques; cette méthode semble ne pas s'appliquer à la recherche des asymptotes parallèles à l'axe des y, mais avec un peu d'attention on verra sans peine qu'elle est tout à fait générale.

X. — Cas général.

Décomposons l'équation de la courbe en groupes homogènes, nous aurons un résultat de la forme

$$(1)\qquad \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_0(x, y) = 0,$$

$\varphi_i(x, y)$ désignant en général une fonction homogène de degré i. Divisons par x^m et posons $\frac{y}{x} = c$, remplaçons $\varphi_i(1, c)$ par $\varphi_i(c)$: nous aurons

$$(2)\qquad \varphi_m(c) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}(c) + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}(c) + \ldots = 0;$$

quand on fait croître x, cette formule se transforme en

$$\varphi_m(c) = 0,$$

qui fournit alors les valeurs finies de la limite de $\frac{y}{x}$ ou, si l'on veut, les coefficients angulaires des asymptotes. Pour trouver les ordonnées à l'origine des asymptotes de coefficient angulaire c, on posera

$$y = cx + \delta, \qquad \frac{y}{x} = c + \frac{\delta}{x},$$

et l'on cherchera la limite de δ; c'est cette limite qui fournira l'ordonnée à l'origine correspondant aux asymptotes dont le coefficient angulaire est c: la formule (1) divisée par x^m donnera alors, en remplaçant $\frac{y}{x}$ par $c + \frac{\delta}{x}$,

$$\varphi_m\left(c + \frac{\delta}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(c + \frac{\delta}{x}\right) + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varphi_m(c) + \frac{1}{x}\left[\varphi'_m(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-1}(c)\right]$$
$$+ \frac{1}{x^2}\left[\varphi''_m(c)\frac{\delta^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-2}(c)\right] + \ldots = 0;$$

or, $\varphi_m(c)$ étant nul, on peut écrire

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\varphi'_m(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-1}(c) \\ &\quad + \frac{1}{x}\left[\varphi''_m(c)\frac{\delta^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-2}(c)\right] + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

équation qui, pour $x = \infty$, donne, en passant aux limites et en appelant l la limite de δ,

$$\varphi'_m(c)l + \varphi_{m-1}(c) = 0,$$

d'où

$$l = -\frac{\varphi_{m-1}(c)}{\varphi'_m(c)}.$$

Si donc $\varphi'_m(c)$ n'est pas nul, on aura une asymptote correspondant au coefficient c; mais, si $\varphi'_m(c)$ est nul, l'équation $\varphi_m(c)$ aura une racine double, et l sera infini, à moins que l'on n'ait $\varphi_{m-1}(c) = 0$. Dans ce cas, la formule (3) donnera, en multipliant par x,

$$\begin{aligned} &\varphi''_m(c)\frac{\delta^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-2}(c) \\ &\quad + \frac{1}{x}\left[\varphi'''_m(c)\frac{\delta^3}{1.2.3} + \varphi''_{m-1}(c)\frac{\delta^2}{1.2} + \varphi'_{m-2}(c)\frac{\delta}{1} + \varphi_{m-3}(c)\right] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

et, pour $x = \infty$, l sera déterminé par l'équation

$$\varphi''_m(c)\frac{l^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{l}{1} + \varphi_{m-2}(c) = 0;$$

on aura alors deux asymptotes correspondant à la valeur c du coefficient angulaire. On voit comment on continuerait cette recherche si φ''_m, φ'_{m-1} et φ_{m-2} étaient nuls.

Revenons maintenant sur cette discussion. Supposons les axes de coordonnées tellement choisis qu'il n'y ait pas d'asymptotes parallèles aux axes : alors l'équation $\varphi_m(c)$ détermine m coefficients angulaires, égaux ou inégaux ; à chaque valeur simple de c correspond une et une seule valeur de l, finie ou infinie ; donc, en général,

Une courbe d'ordre m a m asymptotes.

Ce théorème ne tombe pas en défaut quand c est racine double, triple, etc., de $\varphi_m(c) = 0$; nous avons vu en effet qu'à une pareille valeur de c correspondaient deux, trois, etc. asymptotes, réelles ou imaginaires, situées à distance finie ou infinie, confondues ou non.

Au point de vue purement analytique, la question est résolue; au point de vue géométrique, il reste à indiquer la disposition des branches infinies de la courbe par rapport à ses asymptotes.

L'équation (3) n'est autre chose que l'équation même de la courbe, pourvu que l'on y considère δ comme égal à $y - cx$; si l'on y fait

$$\delta = l + \varepsilon,$$

ε représentera la différence entre l'ordonnée de la courbe et l'ordonnée de l'asymptote. En effet, cette formule donne

$$y - cx = \mathrm{Y} - cx + \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad y - \mathrm{Y} = \varepsilon,$$

Y désignant l'ordonnée de l'asymptote, y celle de la courbe pour l'abscisse x. La substitution $\delta = l + \varepsilon$ dans (3) transforme cette équation comme il suit, en observant que

$$l\varphi'_m(c) + \varphi_{m-1}(c)$$

est nul :

$$\varepsilon\varphi'_m(c) + \frac{1}{x}\left[\varphi''_m(c)\frac{(l+\varepsilon)^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{l+\varepsilon}{1} + \varphi_{m-2}(c)\right] + \ldots = 0.$$

Une discussion, semblable à celle qui a été faite à propos des points singuliers, montrera si, pour de grandes valeurs de x, ε est positif ou négatif, c'est-à-dire si la courbe est au-dessus ou au-dessous de son asymptote.

Supposons que $\frac{1}{x}$ tende vers 0; l'équation précédente, en général, s'écrira

$$(4) \quad \varepsilon\varphi'_m(c) + \frac{1}{x}\left[\varphi''_m(c)\frac{l^2}{1.2} + \varphi'_{m-1}(c)\frac{l}{1} + \varphi_{m-2}(c)\right] + \omega = 0,$$

ω désignant un ensemble de termes d'ordre supérieur aux

précédents; appelant A le coefficient de $\frac{1}{x}$, on aura sensiblement

$$\varepsilon = -\frac{1}{x}\frac{A}{\varphi'_m(c)}.$$

On voit que ε change de signe avec $\frac{1}{x}$; d'ailleurs il est réel, car, si l'on considère le produit $\varepsilon x = a$ comme variable, la dérivée du premier membre de (4), qui peut s'écrire

$$a\varphi'_c + A + \omega = 0,$$

est $\varphi'_c + \frac{\partial\omega}{\partial a}$ et conserve son signe pour de grandes valeurs de x. Pour $a = -\frac{A}{\varphi'_m(c)} \pm h$, ce premier membre change de signe; donc l'équation en a a une et une seule racine entre $-\frac{A}{\varphi'_m(c)} \pm h$. Puisque ε change de signe avec $\frac{1}{x}$, la courbe est en général située de part et d'autre de son asymptote, et à une asymptote réelle correspond une branche de courbe réelle; mais il n'en est pas toujours ainsi.

Si, par exemple, dans (4), le coefficient de $\frac{1}{x}$ était nul, c'est-à-dire si l'on avait $\varphi''_m(c) = 0$, $\varphi'_{m-1}(c) = 0$, $\varphi_{m-2}(c) = 0$, ε serait de même ordre que $\frac{1}{x^2}$ et ne changerait plus de signe avec x: deux branches de courbe seraient alors situées d'un même côté de l'asymptote. Mais il n'est pas nécessaire de pousser cette discussion plus loin, à cause de l'analogie qu'elle présente avec celle des points singuliers.

XI. — Équation des asymptotes.

Conservons les notations du paragraphe précédent et supposons c racine d'ordre de multiplicité i de $\varphi_m(1, c) = 0$; supposons d'une manière générale l'ordonnée l donnée par l'équation

$$\varphi^i_m(c)\frac{l^i}{i!} + \varphi^{i-1}_{m-1}\frac{l^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots = 0.$$

Comme l'équation d'une asymptote est de la forme

$$y = cx + l,$$

on aura l'équation de l'ensemble des asymptotes en éliminant l entre ces deux formules, ce qui donnera

$$(1) \qquad \varphi_m^i(c)\frac{(y-cx)^i}{i!} + \varphi_{m-1}^{i-1}(c)\frac{(y-cx)^{i-1}}{(i-1)!} + \ldots = 0.$$

Cette équation peut se mettre sous une forme remarquable. Posons $c = -\frac{\alpha}{\beta}$; elle pourra s'écrire

$$\frac{1}{i!}\varphi_m^i(\alpha x + \beta y)^i + \frac{1}{(i-1)!}\varphi_{m-1}^{i-1}(\alpha x + \beta y)^{i-1}\beta + \ldots = 0$$

ou bien

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{i!}\dfrac{\partial^i \varphi_m}{\partial \beta^i}(\alpha x + \beta y)^i \\ \quad + \dfrac{1}{(i-1)!}\dfrac{\partial^{i-1}\varphi_{m-1}}{\partial \beta^{i-1}}(\alpha x + \beta y)^{i-1}\beta + \ldots = 0; \end{array} \right.$$

mais, la fonction φ_m étant homogène, on a symboliquement

$$\left(\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + \beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}\right)^i = m(m-1)\ldots\varphi_m = 0.$$

L'expression

$$\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}\right)^i$$

s'annule donc pour $x = \alpha$ et $y = \beta$, et même s'annule i fois pour $x = \alpha$ et $y = \beta$, puisque $\varphi_m^{i-1}(c) = 0$; on peut donc poser, en appelant G un facteur fini pour $x = \alpha$, $y = \beta$,

$$\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha} + y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}\right)^i = G(\alpha x + \beta y)^i;$$

si l'on fait $x = 0$, on a

$$\frac{\partial^i\varphi_m}{\partial\beta^i} = G\beta^i,$$

d'où l'on tire, en multipliant en croix,

$$\beta^i\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}\right)^i=\frac{\partial^i\varphi_m}{\partial\beta^i}(\alpha x+\beta y)^i,$$

$$\beta^{i-1}\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}\right)^{i-1}=\frac{\partial^{i-1}\varphi_{m-1}}{\partial\beta^{i-1}}(\alpha x+\beta y)^{i-1},$$

. . . .

La formule (2) devient alors

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta}\right)^i\\&\quad+\frac{1}{(i-1)!}\left(x\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha}+y\frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta}\right)^{i-1}+\ldots=0;\end{aligned}\right.$$

mais on a, en appelant $f(x,y,z)$ le premier membre de l'équation de la courbe,

$$\varphi_m(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta,\gamma)\qquad\text{pour }\gamma=0,$$

$$\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)=\frac{1}{1}\frac{\partial f}{\partial\gamma},\qquad\varphi_{m-2}(\alpha,\beta)=\frac{1}{1.2}\frac{\partial^2 f}{\partial\gamma^2},\ \cdots\ \text{pour }\gamma=0;$$

(3) s'écrit alors

$$\frac{1}{i!}\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^i+\frac{1}{1}\frac{1}{(i-1)!}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^{i-1}+\ldots=0$$

ou, multipliant par $i!$,

$$\begin{aligned}&\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^i+\frac{i}{1}\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^{i-1}\\&\qquad+\frac{i(i-1)}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^{i-2}+\ldots=0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation peut évidemment se mettre sous la forme symbolique

$$(4)\qquad\left(x\frac{\partial f}{\partial\alpha}+y\frac{\partial f}{\partial\beta}+z\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)^i=0,$$

toujours en supposant $\gamma=0$ et $z=1$. Cette forme est bien remarquable. En effet, elle convient à tous les cas, même au cas où l'on aurait affaire à des asymptotes parallèles à l'axe des y; en second lieu, elle met en évidence ce fait que, si

$$\begin{aligned}&\varphi_m(c),\quad\varphi_{m-1}(c),\quad\ldots,\quad\varphi_{m-i}(c),\\&\varphi'_m(c),\quad\varphi'_{m-1}(c),\quad\ldots,\quad\varphi'_{m-i}(c),\quad\ldots,\quad\varphi^i(c)\end{aligned}$$

sont nuls, il y a i asymptotes de même coefficient angulaire $c = \frac{\beta}{\alpha}$, que les dérivées $\frac{\partial^{i-1} f}{\partial\alpha^p \partial\beta^q \partial\gamma^r}$ sont toutes nulles, et que les équations de ces asymptotes sont de la même forme que celles des i tangentes en un point singulier qui serait d'ordre i et qui aurait pour coordonnées homogènes α, β et $\gamma = 0$; donc on peut dire que :

Toute asymptote ayant pour coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$ *est une tangente à l'infini au point de coordonnées* $\alpha, \beta, \gamma = 0$ (1).

Si i asymptotes sont parallèles à la direction $\frac{\beta}{\alpha}$, *elles sont tangentes au même point singulier d'ordre i à l'infini,* α, β, 0.

Si, dans l'équation de la courbe

$$(5) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

on fait

$$(6) \quad x = x_0 + \alpha\rho, \qquad y = y_0 + \beta\rho, \qquad z = z_0 + \gamma\rho, \qquad \gamma = 0,$$

elle devient

$$(7) \qquad \rho^m f(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{m-1} P_1 + \rho^{m-2} P_2 + \ldots = 0,$$

P_i désignant $\left(x_0 \frac{\partial f}{\partial \alpha} + y_0 \frac{\partial f}{\partial \beta} + z_0 \frac{\partial f}{\partial \gamma}\right)^i$ symboliquement. Cette équation a pour racines les ρ des points d'intersection de la droite (6) et de la courbe (5). Si l'on suppose $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ [ou $\varphi_m(c) = 0$], la direction de la droite (6) est celle d'une asymptote; la formule (7) montre qu'elle rencontre la courbe en un point à l'infini. Ainsi :

Les parallèles aux asymptotes rencontrent la courbe à l'infini (et en $m - 1$ points seulement à distance finie).

Si non seulement on pose $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, mais encore si

(1) Il est bien entendu que cette proposition ne s'applique pas à des courbes transcendantes quelconques.

l'on choisit x_0, y_0, z_0 de telle sorte que $P_1 = o$, c'est-à-dire, en définitive, si la droite (6) est une asymptote, elle rencontre la courbe en deux points à l'infini. Ainsi *une asymptote coupe la courbe en deux points situés à l'infini.*

Si toutes les dérivées de f sont nulles jusqu'à l'ordre i inclusivement, on a $P_i = o$; le point (x_0, y_0, z_0) est alors sur l'une des i asymptotes parallèles à la direction α, β, γ; la droite (6) est une de ces asymptotes. Ainsi :

Quand i asymptotes sont parallèles, elles rencontrent la courbe en i points situés à l'infini.

XII. — Étude des points à l'infini.

Le nouveau point de vue auquel on peut considérer les asymptotes des courbes algébriques, et qui permet de les regarder comme des tangentes à l'infini, est fécond ; il permet de trouver ces droites en coordonnées trilinéaires ; il permet aussi de classer les asymptotes et leurs points de contact comme les points singuliers.

Pour trouver les asymptotes d'une courbe

$$f(x, y, z) = o,$$

on pourra faire $z = o$, résoudre l'équation $f(x, y, o) = o$ et chercher les tangentes aux points x, y, racines de cette équation. La courbe aura des points singuliers à l'infini si l'on a, pour $z = o$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = o, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = o, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = o;$$

ces points pourront être des rebroussements ou des points doubles, triples, etc.

Ainsi, deux asymptotes confondues, c'est-à-dire pour lesquelles l'ordonnée à l'origine sera la même, devront être considérées comme des tangentes en un point de rebroussement, etc.

Dans ce qui va suivre, à moins que nous ne prévenions

expressément du contraire, quand il sera question des points singuliers d'une courbe, il faudra compter parmi ces points ceux qui sont à l'infini.

Remarque. — Il peut arriver que la résultante de deux équations de degrés m et n soit d'un degré inférieur à mn, au moins en apparence. Cela a lieu quand on ne tient pas compte des racines infinies de la résultante.

Lorsqu'on veut avoir le nombre de solutions finies des deux équations, il faut retrancher du nombre mn le nombre des solutions infinies; or la théorie des asymptotes fait précisément connaître le nombre et la nature des points à l'infini; il est donc facile de voir en combien de points les deux courbes qui représentent les deux équations se rencontrent à l'infini; en défalquant ce nombre de mn, on aura le nombre des solutions finies des deux équations proposées et par suite le degré de la résultante.

Exemple :

$$x^3 + 2x^2y + y^2x + 3y^2 + y = 0,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0.$$

Les courbes représentées par ces équations ont un contact simple à l'infini sur la droite $y + x = 0$, la tangente est la droite de l'infini; donc elles ont deux points communs à l'infini et, par suite, $6 - 2 = 4$ points communs à distance finie.

XIII. — Sur les tangentes singulières.

Si l'on considère une équation en coordonnées tangentielles ξ, η, les principes du Calcul différentiel ne s'appliqueront point aux droites pour lesquelles η ou $\frac{d\eta}{d\xi}$ serait discontinu ou indéterminé : ces droites sont des tangentes singulières. On fera une théorie des tangentes singulières tout à fait analogue à celle des points singuliers.

Si l'on considère, par exemple, l'équation tangentielle

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

et si l'on fait

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial \zeta}, \quad f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}, \quad \ldots,$$

on reconnaîtra sans peine que, si l'on a à la fois

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f = 0 \quad \text{ou} \quad f_3 = 0,$$

la tangente dont les coordonnées satisfont à cette équation est singulière; elle touche la courbe $f = 0$ en deux points qui peuvent d'ailleurs être confondus : on lui donne le nom de *tangente double*. Quand les deux points de contact sont confondus, cette tangente devient tangente d'inflexion. Ainsi, là où l'analyse des coordonnées ordinaires fait trouver un rebroussement, l'analyse des coordonnées tangentielles met une inflexion en évidence; l'inflexion est donc une exception dans les enveloppes.

XIV. — Remarque au sujet des courbes algébriques.

Une courbe algébrique ne saurait avoir de points d'arrêt ni de points anguleux, et, par suite, une asymptote est toujours asymptote à deux branches réelles. Ce théorème résulte de l'analyse qui précède; mais on peut le démontrer comme il suit :

Prenons le point singulier pour origine; l'équation de la courbe sera

$$(1) \qquad f(x, y) = 0;$$

coupons cette courbe par le cercle de rayon ε infiniment petit

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = \varepsilon^2;$$

le nombre des solutions des équations (1), (2) est pair, le

nombre des solutions imaginaires est pair; donc le nombre des solutions réelles est pair aussi; donc la courbe (1) coupe toujours un cercle décrit de l'un de ses points comme centre en un nombre pair de points, ce qui n'aurait pas lieu si l'on pouvait prendre pour centre du cercle un point d'arrêt.

Une courbe algébrique ne peut avoir de points anguleux, parce que la courbe ayant $\frac{dy}{dx}$ pour ordonnée, qui est algébrique comme la proposée, aurait un et même deux points d'arrêt.

Une droite asymptote à une branche de courbe algébrique est toujours asymptote à une seconde branche; sans quoi, si la courbe $f(x, y) = 0$ n'avait qu'une branche asymptote de la droite $y = 0$, par exemple, la courbe $f\left(y, \frac{1}{x}\right) = 0$ aurait un point d'arrêt à l'origine.

XV. — Exemples de points singuliers.

Développée de l'hyperbole. — Cette courbe a pour équations (p. 110)

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ou, en faisant disparaître les irrationnelles,

$$(a^2x^2 - b^2y^2 - c^4)^3 - 27\,a^2b^2c^4x^2y^2 = 0;$$

on trouve que les asymptotes sont rejetées à l'infini. Pour déterminer les points singuliers, on rend l'équation homogène; on a alors

$$(a^2x^2 - b^2y^2 - c^4z^2)^3 - 27\,a^2b^2c^4x^2y^2z^2 = 0$$

ou

$$P^3 - 27\,a^2b^2c^4x^2y^2z^2 = 0,$$

en posant

$$P = a^2x^2 - b^2y^2 - c^4z^2.$$

Les dérivées relatives à x, y, z sont, à un facteur constant près,

$$(P^2 - 9b^2c^4y^2z^2)x,$$
$$(P^2 + 9a^2c^4x^2z^2)y,$$
$$(P^2 + 9a^2b^2x^2y^2)z.$$

En égalant ces dérivées à o, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} (P \pm 3\,bc^2yz)x = 0, \\ (P \pm 3\sqrt{-1}\,ac^2xz)y = 0, \\ (P \pm 3\sqrt{-1}\,ab\,xy)z = 0. \end{cases}$$

Supposons $x = 0$: les deux dernières équations rentrent l'une dans l'autre; on a donc un point singulier sur l'axe des y, au point $y = \pm\left(\frac{c^2}{b}\right)\sqrt{-1}$, et de même un point singulier sur l'axe des x à l'abscisse $x = \pm\frac{c^2}{a}\cdot$ En ces points, la tangente a pour équation $x^2 = 0$, $y^2 = 0$; ce sont donc des points de rebroussement ordinaires.

Pour $z = 0$, les deux premières équations concordent et donnent $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$, ce qui fournit deux points singuliers réels. Les tangentes en ces points sont données par la formule $z^2 = 0$ et par suite ces points sont des points de rebroussement, la tangente est la droite de l'infini.

Supposons maintenant $x \gtrless 0$, $y \gtrless 0$, $z \gtrless 0$; les équations (1) donnent

$$P = \pm 3\,bc^2yz = \pm 3\,ac^2xz\sqrt{-1} = \pm 3\,abxy\sqrt{-1}$$

ou

$$(2)\qquad \frac{P}{3\,abc^2xyz} = \pm\frac{1}{ax} = \pm\frac{1}{by\sqrt{-1}} = \pm\frac{1}{c^2z\sqrt{-1}}\cdot$$

Si l'on prend les quatre points,

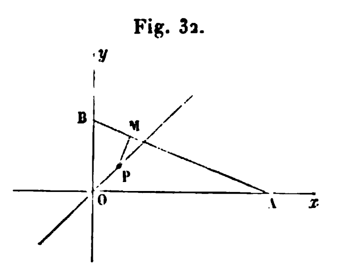
$$ax = \pm by\sqrt{-1} = \pm c^2z\sqrt{-1},$$

on voit que ces points satisfont à (2). En cherchant les tan-

gentes en ces points, on reconnaît que ce sont des points doubles ordinaires.

La *scarabée* est engendrée comme il suit :

Fig. 32.



Supposons qu'une droite de longueur constante s'appuie sur deux droites rectangulaires; elle enveloppe une épicycloïde (p. 139) dont nous avons déjà trouvé l'équation. Si l'on forme la podaire de cette courbe par rapport à un pôle P pris sur la bissectrice de l'angle yOx, cette podaire sera la *scarabée*.

Ainsi la scarabée est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe pris sur la bissectrice d'un angle droit, sur une droite de longueur constante dont les extrémités se meuvent sur les côtés de l'angle droit en question. Cette propriété de la scarabée d'être une podaire permet immédiatement d'en construire géométriquement la tangente et le rayon de courbure.

Cherchons son équation : soient $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OP = a$ et $AB = l$; les coordonnées x, y du point M satisfont à l'équation

$$(1) \qquad \alpha y + \beta x = \alpha\beta$$

de la droite AB, dans laquelle

$$(2) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = l^2;$$

elles satisfont aussi à l'équation de la droite MP

$$(3) \qquad \alpha\left(x - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \beta\left(y - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0.$$

Pour éliminer α et β, on tire $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ de (1) et (3), et on les porte dans (2), que l'on écrit

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{l^2}{\alpha^2\beta^2};$$

ce qui donne

$$\left[y\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+x\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2\left[\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$=l^2\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

il est indiqué de transporter l'origine au point P; on a alors

$$(4)\qquad [y^2+x^2+a(x+y)\sqrt{2}]^2(x^2+y^2)=l^2x^2y^2.$$

En coordonnées polaires, on a une équation fort simple

$$[r^2+ra(\sin\theta+\cos\theta)\sqrt{2}]^2r^2=l^2r^4\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

d'où l'on tire

$$r=a\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\pm l\sin\theta\cos\theta;$$

on discutera plus facilement la courbe en changeant θ en $\frac{\pi}{4}+\theta$, ce qui donne

$$r=2a\cos\theta\pm\frac{l}{2}\cos 2\theta.$$

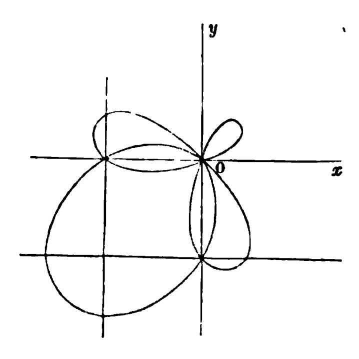
Nous laissons au lecteur le soin de faire cette discussion et de vérifier les résultats de la discussion que nous allons faire de l'équation (4). Cette équation développée est

$$(x^2+y^2)^3+2a\sqrt{2}(x^2+y^2)^2(x+y)$$
$$+2a^2(x+y)^2(x^2+y^2)-l^2x^2y^2=0;$$

l'origine est un point quadruple, les points $x=0, y=-\frac{a\sqrt{2}}{2}$ et $x=-\frac{a\sqrt{2}}{2}, y=0$ sont des points doubles. Les ombilics

du plan sont aussi des points doubles; la forme de la courbe est la suivante :

Fig. 33.



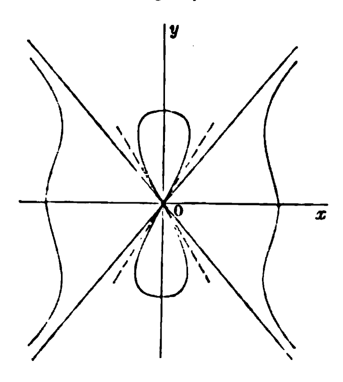
Courbe du diable. — Son équation est de la forme

$$y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0;$$

elle se déduit de l'équation de l'hyperbole équilatère

$$y^2 - x^2 + ay + bx = 0$$

Fig. 34.



en changeant y en y^2 et x en x^2. Nous ferons

$$a = -24, \qquad b = 25,$$

et nous la discuterons sous la forme

$$y^4 - x^4 - 24y^2 + 25x^2 = 0;$$

nous lui trouverons un point double à l'origine; elle passe par les ombilics du plan.

XVI. — Nombre des conditions déterminant une courbe algébrique.

Une équation d'ordre m en x et y renferme un terme de degré zéro, deux termes du premier degré, ..., $m+1$ termes de degré m : elle renferme donc en tout $1+2+\ldots+(m+1)$ ou $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ termes, et, par suite, elle contient $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coefficients. Or deux équations qui ont leurs coefficients proportionnels représentent la même courbe; il en résulte qu'une courbe d'ordre m ne dépend que des $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ rapports des coefficients de son équation à l'un d'eux; pour déterminer une courbe d'ordre m, il faudra donc en général se donner $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1=\frac{m(m+3)}{2}$ conditions.

Théorème. — *Par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, on peut toujours faire passer au moins une courbe d'ordre m.*

Soit, en effet,

$$a_{m,0}y^m+a_{m-1,1}y^{m-1}x+\ldots+a_{0,m}x^m+a_{m-1,0}y^{m-1}+\ldots+a_{0,0}=0$$

l'équation générale d'ordre m; si l'on y remplace successivement x et y par x_1, y_1, par x_2, y_2, ..., x_μ, y_μ, où $\mu=\frac{m(m+1)}{3}$, on aura μ équations donnant en général des valeurs déterminées pour les rapports des coefficients a_{ij}; les rapports de ces coefficients cesseraient d'être bien déterminés, si les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} y^m & xy^{m-1} & \ldots & x^m & y^{m-1} & \ldots & 1 \\ y_1^m & x_1y_1^{m-1} & \ldots & x_1^m & y_1^{m-1} & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_\mu^m & x_\mu y_\mu^{m-1} & \ldots & x_\mu^m & y_\mu^{m-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

relatifs aux éléments de la première ligne, étaient tous nuls. Mais alors les coefficients a_{ij} auraient des rapports indéterminés et le système admettrait une infinité de solutions. Ainsi le théorème se trouve établi.

Nous montrerons toutefois que, lorsque la solution est unique, la courbe passant par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés peut n'être pas irréductible; nous montrerons ensuite dans quels cas la solution peut être multiple.

THÉORÈME I. — *Si par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés on peut faire passer une courbe C unique d'ordre m, et si parmi ces points il y en a plus de mp sur une courbe C' d'ordre p, la courbe C se décompose en une courbe d'ordre p et en une autre d'ordre $m-p$.*

En effet, la courbe C coupe C' en plus de mp points; ces deux courbes doivent avoir des équations réductibles, leurs premiers membres ont des facteurs communs; si la courbe C' est une courbe irréductible, le premier membre de son équation divisera le premier membre de l'équation de C, et par suite C se décomposera comme il a été dit.

THÉORÈME II. — *Si, parmi les $\frac{m(m+3)}{2}$ points qui déterminent une courbe C d'ordre m, il y en a plus de*

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

sur une courbe d'ordre p, elle est décomposable.

En effet, supposons qu'il y ait

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$$

points sur une courbe A d'ordre p; par les

$$\frac{m(m+3)}{2} - mp + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1 = \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$$

points restants, on pourra faire passer une courbe d'ordre $m-p$. Cette courbe jointe à A formera une courbe d'ordre m, passant par les points donnés; si donc la courbe C est unique, elle est décomposable.

En général, deux courbes d'ordre m se coupent en m^2 points et l'on a $m^2 \geqq \frac{m(m+3)}{2}$; en effet, cette formule revient à $m^2 - 3m \geqq 0$ ou à $m \geqq 3$ et, si l'on suppose $m \geqq 3$, il est facile de prouver que $\frac{m(m+3)}{2}$ points ne déterminent pas toujours une courbe d'ordre m. On a en effet le théorème suivant:

THÉORÈME III. — *Toutes les courbes d'ordre m, passant par* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *points donnés, passent par*

$$m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

autres points fixes.

En effet, soient $\varphi = 0$, $\psi = 0$ les équations de deux courbes d'ordre m passant par les points donnés; $\varphi + \lambda\psi = 0$ représentera une courbe passant par les mêmes points et passant en outre par les $m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1$ autres intersections de $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

Or $\varphi + \lambda\psi = 0$ est l'équation générale des courbes passant par les points donnés, parce que l'indéterminée λ permet de faire passer cette courbe par un point déterminé; elle passera alors par $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés ([1]).

On comprend donc que, si, parmi les $\frac{m(m+3)}{2}$ points donnés, il s'en trouvait un appartenant à toutes les courbes passant par $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ d'entre eux, les points donnés fourniraient un résultat indéterminé.

([1]) Cette proposition n'est pas vraie d'une façon absolue (voir *Société mathématique de France*, t. V, p. 160 : *Sur un théorème d'Algèbre*, par M. Halphen.

THÉORÈME IV. — *Si l'on connaît* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *des points d'intersection de deux courbes d'ordre* m, *on trouvera par cela même les* $m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ *autres points d'intersection.*

En effet, il suffira de former l'équation de deux courbes d'ordre m, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ passant par les points donnés; les intersections de ces deux courbes fourniront les points cherchés.

Si l'on applique les principes précédents aux coordonnées tangentielles, on voit qu'il faudra $\frac{m(m+3)}{2}$ tangentes pour déterminer une courbe de $m^{\text{ième}}$ classe, que l'équation générale des courbes de $m^{\text{ième}}$ classe ayant $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ tangentes communes est de la forme $\varphi + \lambda\psi$, ...

Sans qu'il soit nécessaire d'insister beaucoup sur ce point, il est évident que les raisonnements que nous venons de faire s'appliquent aux points réels ou imaginaires, situés à distance finie ou infinie; mais il y a quelques modifications à introduire quand on fait intervenir les points singuliers et nous allons nous y arrêter quelques instants.

XVII. — Nombre des conditions imposées par la donnée d'un point singulier.

Nous avons vu que, dans une courbe algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

un point singulier était caractérisé par cette circonstance que l'on avait pour ce point, à la fois,

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0;$$

en général, ces trois équations ne peuvent être satisfaites à la fois, et les courbes algébriques n'ont pas de points singuliers. Toutefois, ces équations pourront être satisfaites pour des

courbes particulières qui jouiront de propriétés plus simples que celles de même degré qui sont dépourvues de points singuliers.

Au point de vue analytique, nous classerons les points singuliers en :

Points *doubles*, pour lesquels on aura seulement

$$(1) \qquad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

Ainsi nous rangeons parmi les points doubles les points isolés, comme les points de rebroussement ordinaires, comme les points où deux branches réelles de courbe viennent se croiser. Il y a plus, nous rangerons aussi parmi ces points ceux où une courbe imaginaire présente le caractère analytique (1).

Les points *triples* sont ceux où l'on a non seulement les relations (1), mais aussi les relations

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{13} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{33} = 0;$$

et ainsi de suite. Un point de rebroussement sera un point singulier pour lequel deux tangentes seront confondues.

Ces points multiples pourront d'ailleurs être situés à distance finie ou infinie.

Il résulte de là que *la donnée d'un point multiple d'ordre p pour une courbe algébrique équivaut à la donnée de*

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

points simples ou, si l'on veut, équivaut à un nombre égal de conditions.

En effet, se donner un point d'ordre p, c'est se donner les relations

$$\begin{array}{llll} f = 0, & f_1 = 0, & f_2 = 0, & f_3 = 0, \\ f_{11} = 0, & f_{12} = 0, & \ldots\ldots, & f_{33} = 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}} = 0, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \dfrac{\partial^{p-1} f}{\partial z^{p-1}} = 0. \end{array}$$

Ces dernières,

$$\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-1}} = 0, \qquad \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^{p-2}\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^{p-1} f}{\partial z^{p-1}} = 0,$$

comprennent toutes les autres, et par conséquent se réduisent au nombre des termes d'un polynôme de degré $p - 1$ homogène à trois variables, à savoir $\frac{p(p+1)}{2}$.

La donnée d'un point singulier peut équivaloir à un plus grand nombre de conditions, si ce point est un point de rebroussement. Ainsi, par exemple, la donnée d'un point de rebroussement ordinaire fournira les conditions

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad f_3 = 0,$$
$$f_{12}^2 - f_{11} f_{22} = 0;$$

cette donnée équivaudra alors, non plus à trois conditions, mais bien à quatre.

En général, si, en un point singulier d'ordre p, α branches ont une même tangente, il faudra écrire d'abord les $\frac{p(p+1)}{2}$ conditions exprimant que le point est d'ordre p, puis les $\alpha - 1$ équations exprimant que l'équation du faisceau des tangentes a une racine d'ordre de multiplicité α.

Des observations analogues pourraient être faites au sujet des tangentes singulières.

XVIII. — Intersections de deux courbes algébriques. Étude d'une intersection en particulier.

Deux courbes d'ordre m et n se coupent en général en mn points; mais le nombre de ces points peut être moindre et, pour que l'on puisse dire que les deux courbes se coupent toujours en mn points, il faut compter certains points communs plusieurs fois. Ainsi deux courbes présentant un contact se coupent réellement en deux points confondus en ce point de contact.

Considérons, en général, deux courbes ayant un point singulier commun.

Prenons pour origine des coordonnées le point singulier en question; les équations des deux courbes pourront se mettre sous les formes

$$(1)\qquad \varphi_i(x, y) + \varphi_{i+1}(x, y) + \varphi_{i+2}(x, y) + \ldots = 0,$$

$$(2)\qquad \psi_j(x, y) + \psi_{j+1}(x, y) + \psi_{j+2}(x, y) + \ldots = 0,$$

φ_i, φ_{i+1}, ... désignant des polynômes homogènes de degrés i, $i+1$, ..., et ψ_j, ψ_{j+1}, ... désignant des polynômes homogènes de degrés j, $j+1$, ... La courbe (1) aura alors à l'origine un point multiple d'ordre i et la courbe (2) un point multiple d'ordre j.

Si nous posons $\frac{y}{x} = t$, nous pourrons écrire (1) ainsi

$$x^i \varphi_i(1, t) + x^{i+1} \varphi_{i+1}(1, t) + \ldots = 0$$

ou

$$(3)\qquad \varphi_i(1, t) + x\,\varphi_{i+1}(1, t) + \ldots = 0;$$

pour $x = 0$, cette équation se réduit à $\varphi_i(1, t) = 0$ et, par suite, i racines de cette équation se réduisent pour $x = 0$ aux i racines $a_1, a_2, \ldots, a_i$ de $\varphi_i(1, t) = 0$. Ces i racines pourront être représentées par $a_1 + \varepsilon_1$, $a_2 + \varepsilon_2$, ..., ε_1, ε_2, ... désignant des quantités infiniment petites pour x voisin de 0. Il en résulte que, dans l'équation (1), i racines y seront représentées par $a_1 x + \varepsilon_1 x$, ..., $a_i x + \varepsilon_i x$; or si, pour abréger, on représente par $\Psi(x, y)$ le premier membre de (2), la résultante de (1) et (2) sera

$$\Psi(x, a_1 x + \varepsilon_1 x) \ldots \Psi(x, a_i x + \varepsilon_i x)\,\Omega = 0,$$

Ω désignant un produit de facteurs, tels que $\Psi(x, y_\mu)$, dans lesquels y_μ désigne une quantité finie pour $x = 0$. On pourra donc écrire cette résultante ainsi

$$\prod [\psi_j(x, a_\nu x + \varepsilon_\nu x) + \psi_{j+1}(x, a_\nu x + \varepsilon_\nu x) \ldots]\,\Omega = 0$$

ou bien

$$\prod[x^j \psi_j(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + x^{j+1} \psi_{j+1}(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + \ldots]\Omega = 0$$

ou enfin

$$x^{ij} \prod[\psi_j(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + x \psi_{j+1}(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + \ldots]\Omega = 0$$

ou encore

$$(4) \quad x^{ij} \prod[\psi_j(1, a_\nu) + \varepsilon_\nu \psi'_j(1, a_\nu) + \ldots + x\psi_{j+1}(1, a_\nu) + \ldots]\Omega = 0.$$

Les termes du degré le moins élevé dans la résultante contiendront donc x^{ij} en facteur; donc :

Deux courbes qui, passant en un même point M, *ont en ce point l'une un nœud d'ordre i et l'autre un nœud d'ordre j doivent être considérées comme se coupant au moins en ij points confondus.*

Mais il n'y aura pas, en général, contact.

Si l'une des quantités $\psi_j(1, a_\nu)$ s'annulait, les équations $\varphi_i(1, t) = 0$ et $\psi_j(1, t) = 0$ auraient la racine commune a_ν; or ces équations sont les équations aux coefficients angulaires des tangentes aux nœuds des deux courbes : les courbes (1) et (2) auraient ainsi une tangente commune; pour voir ce qui arrive dans ce cas, il convient d'évaluer ε_ν. A cet effet, remplaçons dans (3) t par $a_\nu + \varepsilon_\nu$; nous aurons

$$\varphi_i(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + x \varphi_{i+1}(1, a_\nu + \varepsilon_\nu) + \ldots = 0$$

et, en développant par la formule de Taylor,

$$(5) \quad \varphi_i(1, a_\nu) + \varepsilon_\nu \varphi'_i(1, a_\nu) + \ldots + x \varphi_{i+1}(1, a_\nu) + \ldots = 0;$$

$\varphi_i(1, a_\nu)$ étant nul, on en conclut, aux termes du second ordre près,

$$\varepsilon_\nu = -\frac{\varphi_{i+1}(1, a_\nu)}{\varphi'_i(1, a_\nu)} x;$$

ε_ν sera donc, en général, proportionnel à x et de la forme $b_\nu x + \varepsilon'_\nu x$, ε' s'annulant encore avec x; toutefois cette con-

clusion serait en défaut si $\varphi'_i(1, a_\nu)$ était nul. Il faudrait alors prendre un plus grand nombre de termes dans la formule (5) et déterminer le degré de ε par rapport à x, par la méthode de Minding.

Supposons donc d'abord $\varepsilon_\nu = b_\nu x + \varepsilon'_\nu x$ et $\psi_j(1, a_\nu) = 0$, $\varphi_i(1, a_\nu) = 0$. Non seulement les courbes ont un nœud commun, mais encore une tangente commune ; la formule (4) contiendra alors en facteur x^{i+j+1}, et l'on voit que :

Si deux courbes possèdent en un point M *des nœuds à i branches et à j branches, elles devront être considérées comme ayant i + j points confondus en* M, *plus autant de points confondus avec ceux-ci qu'elles auront de tangentes communes en* M.

Si $\varphi'_i(1, a_\nu)$ était nul, la tangente correspondant à la direction a_ν serait une tangente double ou, si l'on veut, une tangente de rebroussement ; ε_ν serait de l'ordre $\frac{1}{2}$ en x ; l'exposant de x^{i+j} se trouverait encore augmenté d'une unité si l'on avait $\psi_j(1, a_\nu) = 0$ et de deux unités si l'on avait $\psi'_j(1, a_\nu) = 0$. Nous ne pousserons pas maintenant la discussion plus loin.

XIX. — Des émanants et des polaires.

Si l'on fait

$$\mathrm{P}f = x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z},$$

Pf sera ce que l'on appelle le premier *émanant* de la fonction homogène $f(x, y, z)$, les quantités $\mathrm{P}^2 f$, $\mathrm{P}^3 f$, ... seront son second, son troisième, ... *émanant* (t. I, p. 250).

Les émanants sont évidemment des covariants. Voici une autre propriété dont nous ne tarderons point à reconnaître l'importance. Posons

$$\mathrm{P}^n f = \left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^{(n)},$$

$$\mathrm{Q}^n f = \left(x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + \ldots\right)^{(n)},$$

et supposons la fonction f entière et de degré m; nous aurons, par la formule de Taylor,

$$\begin{aligned} f(x+x_0, y+y_0, z+z_0, \ldots) &= f(x, y, \ldots) + \frac{Pf}{1} + \frac{P^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{P^n f}{1.2.3\ldots n} + \ldots \\ &= f(x_0, y_0, \ldots) + \frac{Qf}{1} + \frac{Q^2 f}{1.2} + \ldots + \frac{Q^{m-n} f}{1.2.3\ldots(m-n)} + \ldots; \end{aligned}$$

si nous égalons les termes de degré n en $x_0, y_0, \ldots$, qui sont à la fois de degré $m-n$ en $x, y, z, \ldots$, nous aurons

$$\frac{P^n}{1.2.3\ldots n} f = \frac{Q^{m-n}}{1.2.3\ldots(m-n)} f;$$

c'est la propriété que nous voulions établir.

Supposons maintenant que

$$f(x, y, z) = 0$$

soit l'équation homogène d'une courbe de degré m; les courbes représentées par les équations

$$Pf = 0, \quad P^2 f = 0, \quad \ldots, \quad P^n f = 0, \quad \ldots, \quad P^{m-1} f = 0$$

seront ce que l'on appelle la première, la seconde, ... la $(m-1)^{\text{ième}}$ *polaire* de la courbe $f=0$ par rapport au point (x_0, y_0, z_0), qui porte alors le nom de *pôle*. Nous dirons aussi que $Pf=0$ est la polaire de degré $m-1, \ldots$; $P^{m-2}f=0$ sera la polaire conique, $P^{m-1}f=0$ sera la polaire droite ou du premier degré. Les équations des polaires peuvent, en vertu de la propriété démontrée tout à l'heure, s'écrire aussi

$$Q^{m-1} f = 0, \quad Q^{m-2} f = 0, \quad \ldots, \quad Qf = 0;$$

ainsi les équations de la $n^{\text{ième}}$ polaire sont à volonté

$$P^n f = 0, \quad Q^{m-n} f = 0$$

ou

$$\left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)} = 0,$$

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial z_0}\right)^{(m-n)} = 0.$$

On tire de là cette conséquence :

Si le point (x_0, y_0, z_0) *est sur la polaire de degré n du point* (x, y, z), *le point* (x, y, z) *sera sur la polaire de degré* $m-n$ *du point* (x_0, y_0, z_0).

On sait que la polaire d'ordre $m-1$ est la courbe qui passe par les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point (x_0, y_0, z_0).

On sait aussi que, dans le cas où la courbe est du second degré, la polaire unique est une droite et que cette droite a indifféremment pour équation

$$Pf = 0$$

ou

$$Qf = 0.$$

XX. — Définition géométrique des polaires.

Les polaires jouent un rôle important dans la théorie des points singuliers, et il est bon, après en avoir donné la définition analytique, d'en donner aussi une définition purement géométrique.

Considérons m points en ligne droite $A_1, A_2, \ldots, A_m$ et un point M situé sur la même droite; soit $MA_i = r_i$, déterminons un point M' tel que, en posant $MM' = r$, on ait

$$\frac{m}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_m} \quad \text{ou} \quad \sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}\right) = 0;$$

le point M' sera dit *conjugué harmonique* par rapport aux points $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Deux points, M', M'', seront définis par la relation

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_j}\right) = 0;$$

on les appelle *conjugués harmoniques* du second ordre du point M. Les points conjugués d'ordre n sont au nombre de n et définis par la relation

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_j}\right)\cdots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_l}\right) = 0,$$

le nombre des facteurs sous le signe Σ étant n.

Nous poserons

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\right).$$

L'équation $f\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ aura pour racines les distances MA_1, MA_2, ..., MA_m, et si l'on observe que

$$f'\left(\frac{1}{r}\right) = \sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_j}\right)\cdots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_l}\right),$$

le nombre des facteurs sous le signe Σ étant $m-1$, on voit que $f'\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ fournira les points conjugués d'ordre $m-1$, $f''\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ fournira les points d'ordre $m-2$, enfin

$$f^{m-1}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

fournira le point du premier ordre.

Ceci posé, soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation rendue homogène d'une courbe d'ordre m, et

$$(x_0, y_0, z_0)$$

un point quelconque de son plan; par ce point, menons une série de sécantes et cherchons sur ces sécantes le lieu du point conjugué d'ordre n du point (x_0, y_0, z_0). A cet effet, posons

$$x = x_0 + ra, \qquad y = y_0 + rb, \qquad z = z_0 + rc,$$

c désignant une quantité nulle que nous introduisons pour la symétrie; r sera la distance du point (x_0, y_0, z_0) au point (x, y, z), et l'équation

$$f(x_0 + ra, y_0 + rb, z_0 + rc) = 0$$

fera connaître les distances r du point (x_0, y_0, z_0) aux points d'intersection de la sécante issue de (x_0, y_0, z_0) sous l'inclinaison a, b avec la courbe.

Cette équation peut s'écrire, en divisant par r^m,

$$f\left(\frac{x_0}{r}+a, \frac{y_0}{r}+b, \frac{z_0}{r}+c\right)=0.$$

Les conjugués harmoniques d'ordre $m-n$ du point

$$(x_0, y_0, z_0)$$

seront donnés par la formule

$$\frac{d^n f}{\left(d\frac{1}{r}\right)^n}=0$$

ou

$$\left[x_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x_0}{r}+a\right)}+y_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{y_0}{r}+b\right)}+z_0\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{z_0}{r}+c\right)}\right]^{(n)}=0;$$

pour en avoir le lieu, il faudra éliminer de là a, b, c en les remplaçant par $\frac{x-x_0}{r}$, $\frac{y-y_0}{r}$, $\frac{z-z_0}{r}$, ce qui donnera, en remarquant que r disparaît,

$$\left(x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}=0.$$

Ainsi :

La polaire droite du point (x_0, y_0, z_0) *est le lieu des conjugués harmoniques du premier ordre de ce point, la polaire conique est le lieu de ses conjugués harmoniques du second ordre, et ainsi de suite.*

XXI. — Propriétés des polaires.

Si un point M′ est conjugué harmonique d'ordre n du point M par rapport à m points A_1, A_2, ..., A_m, le point M sera conjugué harmonique d'ordre $m-n$ du point M′ par rapport aux mêmes points. En effet, le point M′ est défini par l'équation

$$(1)\qquad \sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_i}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_j}\right)\cdots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_k}\right)=0.$$

Prenons pour origine le point M′ et posons $M'A_1 = r'_1$, $M'A_2 = r'_2$, ... et $M'M = r' = -r$, nous aurons

$$r_i = MA_i = MM' + M'A_i$$

ou

$$r_i = -r' + r'_i;$$

la formule (1) devient alors

$$\sum\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_i-r'}\right)\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_j-r'}\right)\cdots\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r'_k-r'}\right)=0$$

ou

$$\sum\frac{r'_i}{r'_i-r'}\,\frac{r'_j}{r'_j-r'}\cdots\frac{r'_k}{r'_k-r'}=0$$

ou encore

$$\sum\frac{1}{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_i}}\,\frac{1}{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_j}}\cdots\frac{1}{\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_k}}=0.$$

Si l'on multiplie cette équation par

$$\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_2}\right)\cdots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_m}\right),$$

elle prend la forme

$$\sum\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_\alpha}\right)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_\beta}\right)\cdots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_\lambda}\right)=0,$$

le nombre des facteurs sous le signe Σ étant $m - n$. Le théorème énoncé se trouve donc démontré. De là découle cette proposition, déjà démontrée pour une courbe d'ordre m :

Lorsque le point M′ *se trouve sur la polaire d'ordre n du point* M, *le point* M *se trouve sur la polaire d'ordre m — n du point* M′.

De là découle aussi cet autre théorème :

La polaire droite d'un point M *par rapport à une courbe d'ordre m possède, outre le point* M, $(m-1)^2 - 1$ *autres pôles, en tout* $(m-1)^2$. En effet, le point M′ décrivant la

polaire droite de M, le point M se trouvera sur les polaires de degré $m-1$ du point M'; ces polaires forment donc un faisceau passant par $(m-1)^2$ points fixes qui sont autant de pôles analogues à m. Ce théorème est facile à généraliser.

XXII. — Influence des points singuliers sur la classe d'une courbe.

Je rappelle que la classe d'une courbe est le degré de son équation tangentielle ou, si l'on veut, c'est le nombre des tangentes qu'on peut lui mener par un point donné.

Théorème I. — *La polaire de degré $m-1$ d'une courbe de degré m, relative à un point* M, *passe par les points de contact des tangentes issues de* M (x_0, y_0, z_0).

Ce théorème, déjà démontré, résulte de ce que l'équation de cette polaire est

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

et que cette équation exprime aussi que la tangente en M passe en x_0, y_0, z_0. Il résulte aussi de ce que, quand sur m points en ligne droite deux sont confondus, un de leurs conjugués harmoniques d'ordre $m-1$ coïncide avec eux.

Théorème II. — *La classe d'une courbe d'ordre m est en général $m(m-1)$.*

En effet, la polaire de degré $m-1$ coupe la courbe proposée en $m(m-1)$ points (déjà démontré avec plus de détails).

Ce théorème est soumis à quelques restrictions; c'est ce qui va résulter des théorèmes suivants :

Théorème III. — 1° *Tout point singulier d'une courbe de degré m appartient à la polaire de degré $m-1$ d'un point quelconque du plan.*

2° *Tout point triple de la courbe est un point de sa*

polaire de degré m — 2, et un point double de la polaire de degré m — 1 d'un point quelconque du plan.

3° *Tout point quadruple est un point de la polaire de degré m — 3, un point double de la polaire de degré m — 2, un point triple de la polaire du degré m — 1 d'un point quelconque du plan, etc.*

En effet :

1° Un point de la courbe $f = 0$, pour lequel on a

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

appartient à la courbe

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

qui est la polaire d'ordre $m - 1$ du point quelconque (x_0, y_0, z_0).

2° Un point triple de la courbe, pour lequel on a

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{13} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{33} = 0,$$

appartient à la courbe

$$x_0^2 f_{11} + y_0^2 f_{22} + z_0^2 f_{33} + 2 y_0 z_0 f_{23} + 2 x_0 z_0 f_{13} + 2 x_0 y_0 f_{12} = 0,$$

qui est une polaire de degré $m - 2$; en ce point on a aussi, quels que soient x_0, y_0, z_0,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0;$$

et la polaire du degré $m - 1$ y possède un point singulier, et ainsi de suite. D'ailleurs, la théorie des points conjugués conduirait au même résultat.

Théorème IV. — *Quand la courbe possède un point de rebroussement ou en général un point singulier avec deux*

tangentes confondues, la polaire de degré $m-1$ est tangente en ce point à la courbe.

En effet, prenons le point singulier pour origine; l'équation de la courbe sera de la forme

$$z^{m-k}\varphi_k(x,y)+z^{m-k-1}\varphi_{k+1}(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0,$$

φ_k, φ_{k+1}, ... désignant des fonctions homogènes de degrés k, $k+1$, ...; l'équation des tangentes au nœud est

$$\varphi_k(x,y)=0.$$

L'équation de la polaire du point (x_0, y_0, z_0) est

$$0=x_0\left[z^{m-k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+z^{m-k-1}\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial x}+\ldots\right]+y_0\left[z^{m-k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}+\ldots\right]$$
$$+z_0[(m-k)z^{m-k-1}\varphi_k+\ldots];$$

les termes du degré le moins élevé en x et y sont

$$z^{m-k}\left(x_0\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+y_0\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\right);$$

donc (ce que l'on savait déjà) la polaire passe par les points singuliers, puisque k est au moins égal à 2, si l'origine est un point singulier; de plus (ce que l'on a vu également tout à l'heure), la polaire possède à l'origine un point singulier d'un ordre immédiatement inférieur à celui que possède la courbe, enfin les tangentes au nœud de la polaire sont données par

$$x_0\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}+y_0\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}=0.$$

Or, si $\varphi_k=0$ possède une racine double et si, dans ce cas, la courbe proposée a deux tangentes confondues ou un rebroussement, cette racine est simple pour $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}$ et pour $\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}$, et par suite la polaire a pour tangente la tangente double du nœud.

C. Q. F. D.

THÉORÈME V. — *Une courbe d'ordre m est en général de la classe $m(m-1)$, mais la présence d'un point double*

abaisse la classe de deux unités, celle d'un point de rebroussement ordinaire l'abaisse de 3 *unités, celle d'un point dont l'ordre de multiplicité est n l'abaisse au moins de $n(n-1)$ unités.*

Cela découle des théorèmes précédents : en effet, nous avons vu que, si d'un point M on mène des tangentes à la courbe, tous les points de contact appartiennent à la polaire de degré $m-1$ du point M; si la courbe n'a pas de points doubles, les $m(m-1)$ points d'intersection de la courbe et de la polaire fourniront $m(m-1)$ tangentes; mais, si la courbe a un point double, la polaire passera par ce point, et la droite menée du point M au point singulier ne sera pas une tangente proprement dite. Il y a plus, la courbe, dans le voisinage du point double, coupera la polaire en deux points confondus, et deux tangentes disparaîtront : ainsi la présence d'un point double abaisse bien la classe de deux unités. Si le point double en question était de rebroussement, la courbe et la polaire seraient tangentes et par suite se couperaient en trois points confondus : la classe serait donc abaissée de trois unités. Enfin, un point d'ordre de multiplicité n étant un point d'ordre $n-1$ pour la polaire, la courbe et sa polaire se coupent en ce point en $n(n-1)$ points confondus, et la classe s'abaisse de $n(n-1)$ unités au moins ; je dis *au moins*, parce que, si le point multiple considéré avait des tangentes multiples, la courbe et la polaire auraient des contacts qui augmenteraient le nombre de leurs points communs confondus.

Remarque. — Dans les raisonnements qui précèdent nous avons fait usage de la polaire d'un point arbitraire, et c'est ce qui en fait la force ; nos conclusions pourraient tomber en défaut si le pôle était choisi d'une manière particulière. Examinons, par exemple, ce qui arriverait si on le choisissait sur la courbe même.

Prenons pour origine le pôle : l'équation de la courbe se présentera sous la forme

$$z^{m-k}\varphi_k(x,y)+z^{m-k-1}\varphi_{k+1}(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0;$$

l'origine est un nœud si $k > 1$. La polaire de degré $m - 1$ de l'origine aura pour équation

$$(m-k) z^{m-k-1} \varphi_k(x, y) + z^{m-k-2}(m-k-1) \varphi_{k+1}(x, y) + \ldots = 0.$$

On voit qu'elle a les mêmes tangentes que la courbe proposée et que le nombre de points communs aux deux courbes est bien supérieur à ce qu'il est dans le cas général. La seconde polaire a pour équation

$$(m-k)(m-k-1) z^{m-k-2} \varphi_k(x, y) + \ldots = 0;$$

elle a donc aussi les mêmes tangentes que la courbe proposée si $m - k - 1 > 0$ ou si $m > k + 1$, sinon cette polaire a une forme indéterminée.

Pour ne pas pousser trop loin cette discussion, considérons un point ordinaire de la courbe et prenons ce point pour origine. L'équation de la courbe sera

$$f = z^{m-1} \varphi_1(x, y) + z^{m-2} \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0.$$

La polaire droite aura pour équation

$$z_0^{m-1} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial z^{m-1}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi_1(x, y) = 0:$$

ce sera la tangente à la courbe elle-même. La polaire conique aura pour équation

$$z_0^{m-2} \frac{\partial^{m-2} f}{\partial z^{m-2}} = 0$$

ou

$$(m-1)(m-2)\ldots 2 z \varphi_1(x, y) + (m-2)(m-3)\ldots 2.1.\varphi_2(x, y) = 0$$

ou

$$(m-1) \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) = 0,$$

et il est à remarquer que, si la courbe a un point double, l'équation de la polaire conique se réduit à

$$\varphi_2(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire à un système de deux droites. La polaire du troi-

sième degré d'un point triple se réduirait à trois droites, et ainsi de suite.

On voit qu'en général un point multiple d'ordre p d'une courbe se comporte comme un point où seraient condensés p points de la courbe. Cette remarque est la source d'un grand nombre d'applications; montrons par quelques exemples son utilité.

Si une courbe du second degré a un point double, une droite passant par ce point ne la coupe plus, à moins de la confondre avec elle; donc la courbe doit se décomposer en deux droites.

Si une courbe du troisième degré a un point double, une droite passant par ce point ne la rencontre plus qu'en un seul point; il en résulte qu'en prenant ce point pour pôle, l'équation de la courbe en coordonnées polaires contiendra le carré du rayon vecteur en facteur; on pourra le supprimer et l'équation pourra être résolue par rapport au rayon vecteur.

Une courbe du troisième degré ne peut avoir deux points doubles, car la droite qui passerait par ces points doubles rencontrerait la courbe en quatre points et par suite ferait partie de la courbe qui se décomposerait en une conique et une droite.

Une courbe du quatrième degré ne peut avoir plus de trois points doubles, car si elle en avait quatre, une conique passant par ces quatre points et par un cinquième point la couperait en neuf points; elle ferait donc partie de la courbe qui se décomposerait en deux coniques. Nous généraliserons plus loin ces résultats.

XXIII. — De la hessienne et de l'influence des points singuliers sur les points d'inflexion.

Nous avons vu que les points d'inflexion d'une courbe de degré m,

$$f(x, y, z) = 0,$$

étaient donnés par cette équation et par l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

que nous écrirons pour abréger

$$H = 0.$$

$H = 0$ représente une courbe de degré $3(m-2)$, sur laquelle se trouvent les points d'inflexion, qui par suite sont au nombre de $3m(m-2)$. On a donné à cette courbe le nom de *hessienne* de $f=0$, et l'on peut en donner la définition géométrique suivante :

La hessienne d'une courbe est le lieu des points pour lesquels la polaire conique se réduit à deux droites.

En effet, la polaire conique du point (x, y, z) a pour équation

$$X^2 f_{11} + Y^2 f_{22} + Z^2 f_{33} + 2YZ f_{23} + 2XZ f_{13} + 2XY f_{12} = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. Pour que cette conique se réduise à deux droites, il faut que l'on ait précisément

$$H = 0.$$

Ainsi l'on peut dire que la hessienne est le lieu des points pour lesquels la polaire conique a un point singulier; on peut dire aussi que :

La hessienne est le lieu des points singuliers de la première polaire de la courbe proposée.

Et, en effet, si l'on désigne par (x_0, y_0, z_0) les coordonnées du pôle, l'équation de la polaire du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré ou de la première polaire sera

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0.$$

Exprimons que le point x, y, z est singulier; pour cela, il

faudra égaler à zéro les dérivées du premier membre de cette équation, prises par rapport à x, y, z, ce qui donnera

$$x_0 f_{11} + y_0 f_{12} + z_0 f_{13} = 0,$$
$$x_0 f_{21} + y_0 f_{22} + z_0 f_{23} = 0,$$
$$x_0 f_{31} + y_0 f_{32} + z_0 f_{33} = 0.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0 entre ces équations, on a le lieu des points singuliers de la première polaire. Ce lieu, comme on le voit, n'est autre chose que la hessienne. C. Q. F. D.

La théorie des polaires permet d'ailleurs de retrouver directement la formule $H = 0$. En effet, si l'on prend un point d'inflexion pour origine et la tangente en ce point pour axe des x, l'équation de la courbe prend la forme

$$z^{m-1}y + z^{m-2}(ay^2 + bxy) + z^{m-3}\varphi_3 + \ldots + \varphi_m = 0,$$

de telle sorte que, pour $y = 0$, l'équation en x ait une racine triple égale à zéro. La polaire conique de l'origine est

$$(m-1)(m-2)\ldots 2yz + (m-2)\ldots 2.1(ay^2 + bxy) = 0;$$

cette équation représente deux droites dont l'une est l'axe des x.

Réciproquement, si la polaire conique représente deux droites, on peut supposer que l'une soit l'axe des x et y sera facteur dans l'équation de la polaire conique, à savoir dans $\frac{\partial^{m-2} f}{\partial z^{m-2}}$, et par suite dans les deux premiers termes de f; en effet, $\frac{\partial^{m-2} f}{\partial z^{m-2}}$ étant égal à $pyz + ay^2 + byx$, $\frac{\partial^{m-3} f}{\partial z^{m-3}}$ sera égal à $py\frac{z^2}{2} + (ay^2 + bxy)z + \varphi_3$, où φ_3 est un polynôme de degré 3 en x et y. En remontant ainsi jusqu'à f, on voit que y restera facteur dans les deux premiers termes; par suite, pour $y = 0$, on aura trois racines nulles en x, et le point en question sera un point d'inflexion. On voit donc que les points d'inflexion appartiennent au lieu des points pour lesquels la polaire conique se réduit à deux droites, lieu dont l'équation est évidemment $H = 0$.

Un point de rebroussement ordinaire dans une courbe fait disparaître huit points d'inflexion.

3° On verrait, d'une façon analogue, que la présence d'un point triple fait disparaître au moins quinze points d'inflexion de la courbe proposée.

Remarque. — Une courbe du troisième degré a $3.3.1 = 9$ points d'inflexion; mais, quand elle a un point double, elle n'en possède plus que trois, et, quand elle a un rebroussement, elle n'en possède plus qu'un.

XXIII. — Formules de Plücker.

Supposons qu'une courbe ne contienne que des singularités ordinaires. Soient

m son degré;
n sa classe;
δ le nombre de ses points doubles;
τ celui de ses tangentes doubles;
i le nombre de ses inflexions;
r celui de ses rebroussements.

Un point double ordinaire abaisse la classe de deux unités et un rebroussement ordinaire de trois unités; donc, le nombre qui exprime la classe étant en général $m(m-1)$, on aura

(1) $$n = m(m-1) - 2\delta - 3r.$$

La théorie des coordonnées tangentielles fournit l'équation analogue

(2) $$m = n(n-1) - 2\tau - 3i.$$

Un point double fait disparaître six inflexions, un point de rebroussement ordinaire huit; donc $3m(m-2)$ étant le nombre des inflexions d'une courbe qui n'a pas de points singuliers, on devra avoir

(3) $$i = 3m(m-2) - 6\delta - 8r.$$

La théorie des coordonnées tangentielles donnerait

$$(4)\qquad r = 3n(n-2) - 6\tau - 8i.$$

Les formules (1), (2), (3), (4) sont ce que l'on appelle les *formules de Plücker*.

Ces formules (1), (2), (3), (4) ne sont pas distinctes; car, en ajoutant les deux premières, d'une part, et les deux dernières d'autre part, après les avoir multipliées par 3, on obtient des résultats identiques.

Si une courbe n'a pas de points doubles ni de points de rebroussement, les formules (1) et (2) donnent

$$n = (m-1)m, \qquad i = 3m(m-2),$$

et la formule (2)

$$2\tau = n(n-1) - m - 3i = m(m-2)(m^2-9).$$

Ainsi une courbe de degré m sans points doubles et sans rebroussements a $\frac{m(m-2)(m^2-9)}{2}$ tangentes doubles.

XXIV. — Sur la courbe appelée jacobienne.

Si l'on considère les trois courbes

$$\varphi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \psi = 0,$$

et si l'on désigne toujours les dérivées relatives à x, y, z par les indices 1, 2, 3, la courbe représentée par l'équation

$$\frac{\partial(\varphi, \chi, \psi)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

ou

$$(1)\qquad \varphi_1\chi_2\psi_3 + \varphi_2\chi_3\psi_1 + \varphi_3\chi_1\psi_2 - \psi_1\chi_2\varphi_3 - \psi_2\chi_3\varphi_1 - \psi_3\chi_1\varphi_2 = 0$$

sera ce que l'on appelle la *jacobienne* des trois courbes :

Quand trois courbes passent par un même point, la jacobienne passe par ce point.

En effet, en appelant m, n, p les degrés de φ, χ, ψ, on a

$$m\varphi = x\varphi_1 + y\varphi_2 + z\varphi_3,$$
$$n\chi = x\chi_1 + y\chi_2 + z\chi_3,$$
$$p\psi = x\psi_1 + y\psi_2 + z\psi_3;$$

si donc on désigne par J le premier membre de (1), on a

$$(2) \qquad \mathrm{J}x = m\varphi \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)} + n\chi \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(y, z)} + p\psi \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(y, z)}.$$

Donc J est nul quand on a à la fois $\varphi, \chi, \psi = 0$; donc, etc.

Quand trois courbes de même degré passent par un même point, la jacobienne a en ce point une singularité.

En effet, en différentiant (2), on a

$$x \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} + \mathrm{J} = m\varphi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)} + n\chi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(y, z)} + p\psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(y, z)}$$
$$+ m \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)} + n \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(y, z)} + p \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(y, z)}.$$

Or, quand φ, χ, ψ sont nuls, J l'est aussi, et l'on a

$$(\mathrm{A}) \quad x \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} = m \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)} + n \frac{\partial\chi}{\partial x} \frac{\partial(\psi, \varphi)}{\partial(y, z)} + p \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\varphi, \chi)}{\partial(y, z)}.$$

Si donc $m = n = p$, le second membre est égal à $m\mathrm{J}$, c'est-à-dire à zéro, et $\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x}, \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}, \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial z}$ sont nuls.

Si $\chi = 0$ et $\psi = 0$ sont de même degré n et passent toutes deux par un point double de $\varphi = 0$, la jacobienne de $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$ aura aussi un point double au même point, et de plus les tangentes aux deux nœuds seront les mêmes.

C'est ce qui résulte de la formule (A); en effet, si $n = p$ et si $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$, on pourra y remplacer $m \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)}$ par $n \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial(\chi, \psi)}{\partial(y, z)}$; cette formule (A) pourra alors s'écrire

$$x \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial x} = 0,$$

d'où l'on conclut que J a ses trois dérivées nulles. De plus (A) peut s'écrire

$$x\frac{\partial J}{\partial x}=(m-n)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}+nJ.$$

En différentiant par rapport à x et y, on a

$$\frac{\partial J}{\partial x}+x\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}=(m-n)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}\right]+n\frac{\partial J}{\partial x},$$
$$x\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial y}=(m-n)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}\right]+n\frac{\partial J}{\partial y}$$

et, au point commun,

$$x\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}=(m-n)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)},$$
$$x\frac{\partial^2 J}{\partial x\partial y}=(m-n)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

on a donc $J_{11}:\varphi_{11}=J_{12}:\varphi_{12}=J_{13}:\varphi_{13}=\dots$, ce qui met en évidence l'identité des tangentes.

Enfin on peut encore observer que, si $\chi=0$, $\psi=0$ sont de même degré, la jacobienne touchera $\varphi=0$ aux points communs.

En effet, (A) peut s'écrire, en supposant $J=0$,

$$x\frac{\partial J}{\partial x}=(m-n)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)};$$

en différentiant (2) par rapport à y, on aurait

$$x\frac{\partial J}{\partial y}=(m-n)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial(\chi,\psi)}{\partial(y,z)}$$

et, par suite,

$$\frac{\partial J}{\partial x}:\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial J}{\partial y}:\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial J}{\partial z}:\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

La jacobienne de trois cercles est le cercle qui coupe orthogonalement ceux-ci.

On peut donner cette définition géométrique de la jacobienne :

La jacobienne de trois courbes est le lieu des points pour lesquels les polaires droites concourent en un même point.

En effet, ce lieu est donné par l'élimination de α, β, γ entre

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial \chi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \chi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0.$$

La jacobienne de $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$ *est aussi le lieu des points doubles des courbes comprises sous la forme*

$$\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi = 0.$$

Lorsque le premier membre de la jacobienne de trois courbes est identiquement nul, l'une des courbes, si elles sont de même degré, doit passer par les intersections des deux autres; ainsi *la condition nécessaire et suffisante pour que trois courbes de même degré fassent partie d'un faisceau est que le déterminant de leurs premiers membres soit nul.*

Quand l'une des courbes, $\psi = 0$ par exemple, se réduit à une droite, la jacobienne est le lieu des points dont les polaires concourent en des points situés sur la droite donnée.

Quand deux des courbes $\psi = 0$, $\chi = 0$ se réduisent à des droites, la jacobienne est la polaire du point de concours de ces droites.

Supposons trois coniques rapportées à un triangle conjugué

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 = 0,$$

$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0,$$

$$a''x^2 + b''y^2 + c''z^2 = 0.$$

Leur jacobienne sera

$$\begin{vmatrix} ax & by & cz \\ a'x & b'y & c'z \\ a''x & b''y & c''z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad xyz\Delta = 0;$$

elle se réduira alors à trois droites, à moins que le déterminant Δ des coefficients ne soit nul, auquel cas les coniques feraient partie d'un faisceau.

On peut définir la *hessienne* d'une courbe le lieu des points doubles de la première polaire dé cette courbe.

En effet, si l'on considère la courbe

$$(1) \qquad f = 0,$$

sa première polaire sera, pour le point (x_0, y_0, z_0),

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0.$$

Pour que cette polaire ait un point double, il faut que l'on ait à la fois

$$(2) \qquad \begin{cases} x_0 f_{11} + y_0 f_{12} + z_0 f_{13} = 0, \\ x_0 f_{21} + y_0 f_{22} + z_0 f_{23} = 0, \\ x_0 f_{31} + y_0 f_{32} + z_0 f_{33} = 0; \end{cases}$$

l'élimination de x_0, y_0, z_0 fournit bien la hessienne.

La *steinérienne* d'une courbe est le lieu des points pour lesquels la première polaire a un point double; pour avoir la steinérienne de la courbe (1), il faut éliminer x, y, z entre les équations (2), ce qui fournit, en appelant n le degré de f, une équation de degré $3(n-2)$.

La *cayleyenne* d'une courbe est l'enveloppe des droites, telles que AB, A désignant un point pour lequel la première polaire de la courbe a un point double B.

XXV. — Sur le nombre des normales que l'on peut mener par un point donné à une courbe algébrique.

L'équation d'une courbe de degré m étant

$$(1) \qquad f = 0,$$

l'équation de la normale est

$$(2) \qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

cette équation, quand on suppose X, Y donnés, est celle d'une courbe de degré m qui rencontre (1) aux points qui sont les pieds des normales menées de X, Y à cette courbe (1). Donc on peut, en général, mener m^2 normales par un point donné à une courbe d'ordre m.

Mais, si la courbe (1) a δ points doubles et r points de rebroussement, ces points appartiendront à (2), car (2) est satisfaite quand on a $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; de plus, il est facile de voir que, si le point (x, y) commun aux courbes (1), (2) est un rebroussement de (1), les courbes (1) et (2) y ont même tangente. Supposons en effet que le point (x, y) soit pris pour origine, les équations (1) et (2) s'écriront sous la forme

$$x^2 f_{11} + 2xy f_{12} + y^2 f_{22} + \ldots = 0,$$

$$X(y f_{22} + x f_{12}) - Y(x f_{11} + y f_{12}) + \ldots = 0.$$

La tangente à l'origine à la seconde courbe a pour équation $y f_{22} + x f_{12} = 0$, car cette quantité est égale à $y f_{12} + x f_{11}$ à un facteur près, indépendant de x et y, puisque

$$x^2 f_{11} + 2xy f_{12} + y^2 f_{22}$$

est le carré parfait de $\sqrt{f_{11}}\, x + \sqrt{f_{12}}\, y$ ou, si l'on veut,

$$(x^2 f_{11} + 2xy f_{12} + y^2 f_{22}) = f_{11}^{-1} [f_{11} x + f_{12} y]^2 = \ldots;$$

ainsi par un point donné on pourra mener, en général,

$$m^2 - 2\delta - 3r$$

normales. Soit n la classe de la courbe :

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3r;$$

en appelant N le nombre cherché de normales, on a ainsi

$$N = m + n.$$

Il y a une exception à cette règle. Soient T le nombre de fois que la droite de l'infini est tangente à la courbe, p le nombre de fois qu'elle passe par les points circulaires de l'infini : la

droite qui joindra le point (X, Y) aux points de contact avec la droite de l'infini pourra être considérée comme une normale qui ne doit pas compter dans le nombre N; les droites qui joignent le point (X, Y) aux ombilics sont aussi des normales, puisque les droites isotropes sont normales à elles-mêmes; ces normales ne doivent pas compter dans le nombre N, de sorte qu'en réalité on a

$$N = m + n - T - 2p.$$

On peut mener quatre normales à l'ellipse par un point extérieur; si l'ellipse dégénère en parabole, on ne pourra plus en mener que trois; si elle dégénère en cercle, on ne pourra plus en mener que $4 - 2 = 2$.

XXVI. — Sur les développées des courbes algébriques.

On a vu comment on trouvait l'équation de la développée d'une courbe; le procédé le plus simple consiste à chercher l'enveloppe des normales. Il s'agit maintenant de trouver le degré, la classe et les singularités de la développée d'une courbe algébrique.

Nous généraliserons à cet effet la notion de développée comme il suit :

Étant donnés deux points A et B, menons par un point M de la courbe S, dont nous voulons étudier la développée, la tangente; soient T le point où cette tangente rencontre AB et N le conjugué harmonique de T par rapport à A et B : MN sera la *pseudo-normale* de S en M, l'enveloppe de cette pseudo-normale sera la *pseudo-développée* de S.

Cherchons en combien de points la pseudo-développée de S rencontre la droite AB; soient m le degré de S, δ le nombre de ses points doubles, r le nombre de ses rebroussements, i le nombre de ses inflexions, n sa classe; soient m', δ', ... les nombres analogues pour la pseudo-développée S'.

1° Il pourra y avoir un point de S' sur AB, parce que de ce

point on pourra mener deux pseudo-normales infiniment voisines; deux tangentes infiniment voisines au point M de la courbe proposée viendront alors se couper sur AB, le point M sera un point d'inflexion : le nombre m' se composera donc de i.

2° Il pourra y avoir un point de S' sur AB si le point M est un des points d'intersection de S avec AB; ce point coïncidera avec M et sera un point de rebroussement, la tangente en S' sera la droite AB. En effet, à deux points voisins de M, dont les tangentes concourront sur AB, correspondront deux pseudo-normales passant par un même point de AB et infiniment peu inclinées sur AB; chacun de ces nouveaux points comptera alors pour trois points d'intersection : m' se composera donc non seulement de i, mais de $3m$.

3° Quand une tangente à S passe en A ou en B, la pseudo-normale se confond avec la tangente : si la courbe S ne passe pas en A, il ne se présente rien de particulier; mais, si cette courbe passe en A, le point A n'est plus un rebroussement, mais un point ordinaire.

4° Quand la courbe S est tangente à AB en M, le point de contact M, qui compte pour deux, ne fournira qu'un rebroussement.

En résumé, si l'on appelle p le nombre de fois que la courbe passe par les points A ou B, q le nombre de points de S confondus sur la droite AB, on aura

$$m' = i + 3m - 3p - 3q.$$

Supposons que A et B soient les ombilics du plan : cette formule aura encore lieu, et la développée aura son degré m' donné par la formule précédente. Mais, p désignant le nombre de fois que la courbe proposée passe par un ombilic, $2p$ désignera le nombre de fois qu'elle passe par les deux ombilics, et il conviendra d'écrire

$$m' = i + 3m - 3(2p + q).$$

Soit n' la classe de la développée : ce nombre est égal au

nombre des normales que l'on peut mener par un point à la courbe proposée ; donc

$$n' = m + n - (2p + q).$$

Cherchons enfin le nombre i' des points d'inflexion de la développée. Ces points ne peuvent provenir de points de la courbe proposée situés à distance finie, car il faudrait que deux normales menées en des points infiniment voisins du second ordre fussent parallèles. Mais il peut y avoir des points d'inflexion à l'infini ; si le point correspondant de la courbe est un ombilic ou un point de contact avec la droite de l'infini, en sorte que

$$i' = 2p + q,$$

les formules de Plücker feront alors connaître le nombre des points doubles et des rebroussements ; on a en effet

$$n' = m'(m' - 1) - 2\delta' - 3r',$$
$$i' = 3(m' - 2)m' - 6\delta' - 8r'.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. De la Gournerie a appelé *triangulaires* les courbes représentées, en coordonnées trilinéaires, par une équation de la forme

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 0.$$

Discuter ces courbes. La polaire réciproque d'une triangulaire est une triangulaire quelle que soit la conique directrice.

2. Si l'on appelle *diamètre* d'une courbe le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction fixe, on propose : 1° de déterminer l'ordre et la classe des diamètres d'une courbe de degré m ; 2° de discuter les singularités de ce diamètre ; 3° de démontrer que l'enveloppe des diamètres d'une courbe d'ordre m est d'ordre $(m-1)(m-2)$ et de classe $m-1$.

3. Le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une courbe de classe m est d'ordre $m(m-1)$: étudier les singularités de ce lieu.

4. Lorsque plusieurs courbes d'ordre *m* ont *m* points communs, leurs polaires d'un point donné se coupent en un même point.

5. Discuter les singularités de la parallèle à l'ellipse.

6. Discuter les singularités des podaires.

CHAPITRE IV.

DES QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE QUI DÉPENDENT D'INFINIMENT PETITS DU PREMIER ORDRE.

I. — Coordonnées homogènes.

Nous représenterons souvent les coordonnées d'un point dans l'espace, non plus par x, y, z, mais par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$; alors x, y, z, t seront les *coordonnées homogènes* de ce point et les rapports de ces quantités à l'une d'elles seront seuls déterminés. Si, dans l'équation d'une surface

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

on change x, y, z en $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, et si l'on chasse les dénominateurs, cette équation se transforme en une autre homogène, de même degré que (1),

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

et qui, pour $t = 1$, reprend la forme (1). Les points à l'infini correspondent à la valeur $t = 0$ de t. Si l'on remarque que toute équation du premier degré en x, y, z, t représente un plan, excepté l'équation qui ne contient que la variable t, on pourra convenir de dire que cette équation elle-même représente encore un plan rejeté à l'infini ou le *plan de l'infini;* d'ailleurs l'équation $t = 0$ est l'équation limite vers laquelle converge l'équation

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

quand les coordonnées à l'origine $-\frac{d}{a}, -\frac{d}{b}, -\frac{d}{c}$ croissent

indéfiniment, c'est-à-dire quand le plan représenté par cette équation se transporte à l'infini.

Tous les points à l'infini peuvent donc être considérés comme appartenant au plan *analytique* $t = 0$.

Rappelons que tout plan coupe une surface d'ordre m suivant une courbe d'ordre m dont une partie ou la totalité pourra être transportée à l'infini.

Rappelons aussi qu'une courbe est du degré m quand elle est coupée par un plan en m points situés à distance finie ou infinie.

Supposons que, par un point de coordonnées x_0, y_0, z_0, on mène des droites rencontrant la surface représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

à *l'infini*. En d'autres termes, supposons l'équation (1) algébrique et de degré m; en général, la droite représentée par

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = \rho \tag{2}$$

la rencontrera en m points, dont les ρ, ou distances au point x_0, y_0, z_0, seront données par la formule

$$f(x_0 + a\rho, y_0 + b\rho, z_0 + c\rho) = 0. \tag{3}$$

Si cette équation en ρ s'abaisse au degré $m - 1$, on pourra dire qu'elle a alors une racine infinie, et que l'un des points d'intersection de la droite (2) et de la surface est à l'infini. Si l'on appelle $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes de degré le plus élevé dans $f(x, y, z)$, on voit que, pour qu'une droite telle que (2) rencontre la surface à l'infini, il faut et il suffit que $\varphi(a, b, c) = 0$, condition indépendante de x_0, y_0, z_0, qui montre que toute droite parallèle à une droite rencontrant la surface à l'infini la rencontre elle-même à l'infini.

Les droites qui rencontrent une surface à l'infini sont des *droites asymptotiques*, leurs directions forment les *directions asymptotiques;* les droites asymptotiques passant en x_0, y_0, z_0 forment le cône des directions asymptotiques rela-

tives à ce point; pour obtenir son équation, on élimine a, b, c entre $\varphi(a, b, c) = 0$ et les équations (2), ce qui donne

$$\varphi(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Le cône des directions asymptotiques porte parfois le nom de *cône directeur*. Dans les surfaces engendrées par une droite mobile, les droites génératrices de la surface sont évidemment des directions asymptotiques.

II. — Tangentes aux courbes gauches.

La tangente en un point M d'une courbe gauche se définit comme la tangente à une courbe plane; c'est la limite des positions que prend une sécante passant au point M, quand un second point d'intersection vient se confondre avec ce point M.

Les équations générales des droites qui passent par un point M d'une courbe ayant pour coordonnées x, y, z, et par un second point ayant pour coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ sont

$$\frac{X - x}{\Delta x} = \frac{Y - y}{\Delta y} = \frac{Z - z}{\Delta z}. \tag{1}$$

Dans toute courbe le z est une variable dont l'x et l'y sont fonctions; plus généralement, on peut supposer x, y, z fonctions d'une variable indépendante quelconque t. En multipliant les équations (1) par $\Delta t = dt$ et en supposant que le point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ vienne se confondre avec x, y, z, les équations (1) deviennent, pour $\Delta t = 0$,

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

x', y', z' désignant les dérivées de x, y, z relatives à t. Nous remplacerons plus souvent ces équations par les suivantes

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

que l'on obtient en divisant les premières par dt.



Ce sont les équations générales de la tangente à une courbe dans l'espace. Si l'on suppose $z = t$, elles prennent la forme

$$(2) \qquad X - x = (Z - z)\frac{dx}{dz}, \qquad Y - y = (Z - z)\frac{dy}{dz}.$$

Ces équations sont celles de la tangente à la projection de la courbe sur les plans des xz et des yz. Ce qui démontre que *la tangente à la projection d'une courbe sur un plan est la projection de la tangente à la courbe sur ce plan;* ce qui était presque évident *a priori.*

La tangente à une courbe gauche en un point M *est en général la limite des positions que prend une sécante quand deux points d'intersection viennent se confondre en* M.

En effet, les équations d'une sécante passant par les points de la courbe x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 ont pour équations

$$X - x_1 = (Z - z_1)\frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}, \qquad Y - y_1 = (Z - z_1)\frac{y_2 - y_1}{z_2 - z_1};$$

et si x et y sont développables par la formule de Taylor limitée à son premier terme, on pourra écrire

$$x_2 - x_1 = (z_2 - z_1)\xi',$$
$$y_2 - y_1 = (z_2 - z_1)\eta',$$

ξ' et η' désignant des valeurs de $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ pour une valeur de z comprise entre z_1 et z_2; les équations de notre sécante s'écriront alors

$$X - x_1 = (Z - z_1)\xi', \qquad Y - y_1 = (Z - z_1)\eta'.$$

En passant aux limites et en supposant de plus $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ continus, on retombe sur les équations (2). Mais cette conclusion suppose $x, y, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ continus. S'il en était autrement, on dirait que le point (x, y, z) est un *point singulier* de la courbe, et notre théorème pourrait cesser d'être exact.

Toutefois, ne sont pas considérés comme singuliers les points où $\frac{dx}{dz}$ ou $\frac{dy}{dz}$ seraient infinis, si cette circonstance disparaît par un changement de coordonnées. Tous les raisonnements que nous ferons dorénavant supposeront, à moins que l'on ne prévienne expressément du contraire, que l'on n'a jamais affaire à des points singuliers.

Pour exprimer qu'une droite représentée par les équations

$$(3) \qquad \frac{X-x_0}{a} = \frac{Y-y_0}{b} = \frac{Z-z_0}{c} = \rho$$

est tangente à une courbe, il suffira, d'après ce que l'on vient de voir, d'exprimer qu'elle rencontre la courbe en deux points confondus, ce qui se fera en écrivant que les équations (3) et celles de la courbe ont *deux* solutions communes confondues, ou, si l'on veut, que les équations en ρ, obtenues en portant dans les équations de la courbe

$$x_0 + a\rho, \qquad y_0 + b\rho, \qquad z_0 + c\rho$$

à la place de X, Y, Z, ont une solution double commune. (Toutefois il faut bien faire attention qu'une droite rencontrant une courbe en deux points confondus en un point singulier n'est pas toujours tangente.) On pourra aussi, et cela vaudra mieux, exprimer que la droite (3) coïncide avec une tangente, en identifiant les formules (3) avec (2); on a alors

$$x + (Z - z)\frac{dx}{dz} = x_0 + (Z - z_0)\frac{a}{c},$$

$$y + (Z - z)\frac{dy}{dz} = y_0 + (Z - z_0)\frac{b}{c}.$$

Ces formules devant avoir lieu quel que soit Z, il faudra que

$$x - z\frac{dx}{dz} = x_0 - z_0\frac{a}{c},$$

$$y - z\frac{dy}{dz} = y_0 - z_0\frac{b}{c},$$

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

En éliminant x, y, z entre ces équations et celles de la courbe, on aura les conditions du contact.

III. — Plan normal, plan tangent.

Le *plan normal* à une courbe au point M est le plan perpendiculaire à la tangente en M passant par ce point.

Une *normale* est une droite perpendiculaire à la tangente menée par le point de contact. Le plan normal en M est donc le lieu des normales en M.

Si l'on suppose les coordonnées rectangulaires, l'équation du plan normal en x, y, z sera donc

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

Ce plan, en effet, passe bien en x, y, z et il est perpendiculaire à la direction dx, dy, dz de la tangente en ce point.

Un *plan tangent* est un plan qui passe par une tangente. L'équation générale des plans tangents au point (x, y, z) sera donc

$$X - x - (Z - z)\frac{dx}{dz} + \lambda\left[(Y - y) - (Z - z)\frac{dy}{dz}\right] = 0$$

ou, si l'on veut encore,

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

A, B, C étant liés entre eux par la relation

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

Pour exprimer qu'un plan est tangent à une courbe, il suffit d'écrire qu'il passe par une tangente, ou qu'il rencontre la courbe en deux points confondus, ce qui se fera en éliminant x et y entre les équations de la courbe et du plan et en exprimant que la résultante en z a une racine double [lorsque le point (x, y, z) n'est pas singulier].

IV. — Plans tangents aux surfaces courbes.

Supposons que les équations d'une courbe soient données sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \theta(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Cherchons les équations de la tangente au point (x, y, z). Ces équations sont

$$(2)\qquad \frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz};$$

mais il reste à remplacer dx, dy, dz par leurs valeurs que l'on déduira de (1) après les avoir différentiées, ce qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz = 0, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \theta}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial \theta}{\partial z}\,dz = 0. \end{cases}$$

Les équations de la tangente s'obtiendront en tirant $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ de (3) pour porter leurs valeurs dans (2), ce qui revient à éliminer dx, dy, dz entre (2) et (3). Cette élimination peut se faire en remplaçant, dans (3), dx, dy, dz par les quantités proportionnelles $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ tirées de (1); ce qui donne

$$(4)\qquad (X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$(5)\qquad (X - x)\frac{\partial \theta}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial \theta}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0;$$

telles sont les équations de la tangente.

L'une de ces équations est indépendante de la forme de la fonction f; c'est l'équation (5); l'autre équation (4), qui est du premier degré en X, Y, Z, et qui par conséquent représente un plan, reste la même quand on fait varier θ d'une façon

quelconque. En faisant varier la forme de θ, on engendre une série de courbes situées sur la surface $f=0$, et passant en x, y, z; l'une des équations (4) des tangentes à ces courbes est donc la même pour toutes ces courbes : elle représente donc le lieu des tangentes à ces courbes. Ce lieu est, comme l'on voit, un plan; on lui a donné le nom de *plan tangent* en x, y, z à la surface $f=0$.

L'équation (5) est de même celle du plan tangent à la surface $\theta=0$; on peut donc dire que *la tangente en* M *à une courbe, intersection de deux surfaces, est l'intersection des plans tangents à ces deux surfaces au point* M.

La notion de plan tangent est si importante que nous allons nous y arrêter un instant. Le *plan tangent* en un point d'une surface est le lieu des tangentes menées par ce point à la surface. Cette définition ne peut être adoptée que quand on a prouvé que le lieu des tangentes est bien un plan. Il n'en est pas toujours ainsi, et la démonstration précédente, examinée avec soin, le prouverait; car, si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$ étaient nuls tous trois, elle tomberait en défaut.

En général, en un point donné d'une surface représentée par l'équation $f=0$, on n'a pas à la fois

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=0;$$

toutefois cette circonstance pourra se présenter; alors le point (x, y, z) est un *point singulier*. En général, nous appellerons *point singulier* tout point d'une surface pour lequel la coordonnée z ou l'une de ses dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, ... cesserait d'être finie et bien déterminée.

Lorsque l'équation d'une surface se présente sous la forme

$$z=\varphi(x, y)$$

ou

$$\varphi(x, y)-z=0,$$

l'équation (5) du plan tangent prend une forme souvent

usitée; $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont égaux à $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ou $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et $\frac{\partial f}{\partial z}$ est égal à -1 : on a alors, au lieu de l'équation (4),

$$\frac{\partial z}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial z}{\partial y}(Y-y)-(Z-z)=0$$

ou, en désignant, conformément à un usage très répandu, $\frac{\partial z}{\partial x}$ par p et $\frac{\partial z}{\partial y}$ par q,

$$(7) \qquad Z-z=p(X-x)+q(Y-y).$$

Il est clair que cette équation du plan tangent deviendrait illusoire si au point (x, y, z) les quantités $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ cessaient d'être bien déterminées.

On passe de l'équation (7) à l'équation (4) en observant que la règle de la différentiation des fonctions implicites donne

$$p=-\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad q=-\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}.$$

On voit d'ailleurs que $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ ne peuvent être nuls à la fois qu'en un point singulier.

Le plan tangent en x, y, z est le lieu des droites qui, passant en x, y, z, passent aussi par un point infiniment voisin de ce point.

Cette proposition presque évidente peut se démontrer directement, en observant que

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz}$$

sont les équations d'une droite passant par deux points infiniment voisins (x, y, z) et $(x+dx, y+dy, z+dz)$. Si ces deux points sont sur la surface, on a

$$dz=p\,dx+q\,dy;$$

d'où l'on conclut l'équation (7) par l'élimination de dx, dy, dz.

Le plan tangent est, en général, la limite d'un plan passant par trois points, infiniment voisins du point de contact, se confondant avec lui.

En effet, l'équation d'un plan passant par trois points

$$x, y, z; \quad x+h, y+k, z+l; \quad x+h', y+k', z+l'$$

est

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ h & k & l \\ h' & k' & l' \end{vmatrix} = 0;$$

en observant que la formule de Taylor, limitée aux termes du premier ordre, donne pour les accroissements l et l' de z

$$l = ph + qk, \qquad l' = ph' + qk',$$

on a

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ h & k & ph+qk \\ h' & k' & ph'+qk' \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliant la première colonne par p, la seconde par q et soustrayant de la dernière, on a

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z-p(X-x)-q(Y-y) \\ h & k & 0 \\ h' & k' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou bien, en supprimant le facteur $hk'-kh'$ [différent de zéro si les points $(0,0)$, (h,k), (h',k') ne sont pas en ligne droite],

$$Z - z - p(X-x) - q(Y-y) = 0;$$

c'est l'équation du plan tangent.

Cette démonstration suppose h et k développables par la formule de Taylor; elle ne s'appliquerait donc pas au point (x, y, z) si ce point était singulier.

Le plan tangent à une surface, en un point donné M *qui n'est pas singulier, coupe cette surface suivant une courbe qui présente un point singulier en* M.

En effet, si l'on prend le plan tangent pour plan des xy et le point de contact pour origine, l'équation de la surface est de la forme

$$z = \varphi(x, y);$$

la quantité $\varphi(x, y)$ est nulle pour $x = 0, y = 0$, les quantités p et q, c'est-à-dire $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, le sont aussi; car le plan tangent, qui a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) = Z - z,$$

se réduit à $Z = 0$ pour $x = 0, y = 0$. Ceci posé, l'équation de la courbe, intersection de la surface par son plan tangent, est

$$0 = \varphi(x, y).$$

Or $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sont nuls pour $x = 0, y = 0$; donc le point de contact est un point singulier de la section.

On appelle *normale* à une surface la normale au plan tangent menée par le point de contact.

Ses équations sont

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1},$$

ou, en supposant la surface représentée par une équation de la forme $f = 0$,

$$(X - x) : \frac{\partial f}{\partial x} = (Y - y) : \frac{\partial f}{\partial y} = (Z - z) : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

La tangente à une courbe est une droite dont la distance à un point de la courbe infiniment voisin du point de contact est du second ordre; le plan tangent à une surface est un plan qui est à une distance du second ordre d'un point quelconque infiniment voisin du point de contact.

C'est ce que l'on peut constater géométriquement en observant que, si M et M′ sont deux points infiniment voisins d'une courbe et P le pied de la perpendiculaire menée de M′ sur la tangente en M, on aura $M'P = MM' \sin M'MP$; or l'angle M′MP tend vers zéro, puisque MM′ a pour limite la tangente MP en M; donc M′P est bien du second ordre. Réciproquement, si M′P est du second ordre par rapport à MM′, il faudra que M′MP soit infiniment petit, c'est-à-dire que la sécante MM′ soit, à la limite, tangente à la courbe.

Soient maintenant M un point d'une surface, M′ un point voisin de M pris sur la surface, M′P la perpendiculaire menée de M′ au plan tangent. Considérons une courbe passant en M et en M′ et sa tangente située dans le plan tangent; la distance de M′ à sa tangente est au moins égale à M′P; or, cette distance étant du second ordre, il en sera de même de M′P. Réciproquement, si M′P est du second ordre, quel que soit M′, le plan sera tangent à la section plane passant en M′, et par suite contiendra une infinité de tangentes à la surface.

V. — Nouvelle forme de l'équation du plan tangent. — Conditions auxquelles on peut l'assujettir.

Supposons que, dans l'équation d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

on remplace x, y, z par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ et que l'on chasse ensuite le dénominateur t (si l'on peut); on obtiendra une équation homogène en x, y, z, t, à savoir

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

laquelle sera identique à $f(x, y, z) = 0$ quand on supposera $t = 1$ [si l'équation $f(x, y, z) = 0$ est de forme entière, l'équation (1), obtenue en chassant le dénominateur t, sera entière et de même degré]. Nous pourrons différentier la fonction f par rapport à t; mais, les différentiations effec-

tuées, nous supposerons $t = 1$. Ceci posé, l'équation du plan tangent à la surface (1), dans laquelle t est supposé égal à 1, est

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ou

$$(2)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} - \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0.$$

Or on a identiquement, en vertu du théorème des fonctions homogènes,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial f}{\partial t} = \mu f,$$

μ désignant le degré de la fonction homogène f; et, comme $f(x, y, z, t) = 0$, on tire de là, en supposant $t = 1$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = -t\frac{\partial f}{\partial t} = -T\frac{\partial f}{\partial t},$$

et, par suite, (2) devient

$$(3)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Cette formule est une nouvelle forme de l'équation du plan tangent, qui est souvent plus utile que la forme (2).

Problème I. — *Trouver la condition pour que le plan représenté par*

$$(1)\qquad lX + mY + nZ + pT = 0$$

(*où* T *est supposé égal à un*) *soit tangent à la surface représentée par l'équation*

$$f(X, Y, Z, T) = 0.$$

Pour résoudre ce problème, on peut exprimer que le plan coupe la surface en trois points confondus, ou suivant une courbe à nœud; mais il vaut mieux identifier l'équation (1)

avec celle du plan tangent

$$(2)\qquad X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0$$

au point (x, y, z), ce qui donne

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}:l=\frac{\partial f}{\partial y}:m=\frac{\partial f}{\partial z}:n=\frac{\partial f}{\partial t}:p,$$

avec la condition

$$(4)\qquad f(x, y, z, t)=0,$$

qui exprime que le point (x, y, z) est sur la surface. En éliminant x, y, z, t entre (3) et (4), on a la condition cherchée. Pour faire l'élimination, on égale la suite de rapports (3) à s; on a alors

$$(5)\quad \frac{\partial f}{\partial x}-sl=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}-sm=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}-sn=0,\quad \frac{\partial f}{\partial t}-sp=0;$$

en ajoutant ces équations, multipliées par x, y, z, t, et en observant que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}+t\frac{\partial f}{\partial t}=\mu f=0,$$

on a

$$(6)\qquad lx+my+nz+pt=0,$$

équation qui peut remplacer (4). Ainsi la condition cherchée s'obtient en éliminant x, y, z, t, s entre (5) et (6).

Si, pour faire une application, nous supposons que $f=0$ se réduise à l'équation du second degré

$$(7)\left\{\begin{aligned} &a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}t^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz\\ &\qquad +2a_{14}xt+2a_{23}yz+2a_{24}yt+2a_{34}zt=0,\end{aligned}\right.$$

la condition pour que le plan (1) soit tangent à cette surface s'obtiendra en éliminant x, y, z, t, s entre (6) et

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t-ls=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui donnera pour la condition cherchée

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & l \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p \\ l & m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En général, assujettir un plan à être tangent à une surface, c'est l'assujettir à une seule condition, comme on le voit. Cependant les équations (3) et (6) peuvent être telles que l'on puisse en déduire *deux* relations distinctes, indépendantes de x, y, z, entre l, m, n, p. Dans ce cas, les rapports $l : m : n : p$ peuvent s'exprimer en fonction d'un seul d'entre eux, et les formules (3) montrent que les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$ sont telles qu'il existe deux relations homogènes entre elles. Nous reviendrons plus tard sur cette question; bornons-nous à faire observer, dès à présent, qu'il existe une classe particulière de surfaces que l'on appelle *développables* et telles qu'assujettir un plan à leur être tangent, c'est l'assujettir à deux conditions.

Problème II. — *Trouver la condition pour qu'une droite touche une surface.*

On peut exprimer que la droite rencontre la surface en deux points confondus; mais, si l'on observe que la surface peut avoir des points singuliers, il vaudra mieux exprimer que la droite en question est contenue dans un plan tangent et passe par le point de contact.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} lX + mY + nZ + pT = 0, \\ l'X + m'Y + n'Z + p'T = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite; pour exprimer qu'elle est contenue dans le plan tangent au point (x, y, z, t) à la surface représentée par l'équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

il faudra exprimer que le plan tangent

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} + T \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

passe par l'intersection des plans (1), et que le point (x, y, z, t) est sur la droite (1). En appelant alors s et s' deux paramètres convenablement choisis, on devra avoir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x} + sl + s'l' = 0, \qquad &&\frac{\partial f}{\partial y} + sm + s'm' = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial z} + sn + s'n' = 0, &&\frac{\partial f}{\partial t} + sp + s'p' = 0, \\ &lx + my + nz + pt = 0, &&l'x + m'y + n'z + p't = 0. \end{aligned}$$

L'élimination de x, y, z, t, s, s' entre les équations donnera la condition cherchée.

En particulier, si $f(x, y, z, t)$ est égal à la fonction du second degré $a_{11}x^2 + \ldots + 2a_{34}zt$, on aura pour la condition cherchée

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & l & l' \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m & m' \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n & n' \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & p & p' \\ l & m & n & p & 0 & 0 \\ l' & m' & n' & p' & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

VI. — Coordonnées tétraédriques.

Désignons par p, q, r, s les distances d'un point à quatre plans fixes formant un tétraèdre; soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de ce point : on aura

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \varpi, \\ q &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - \varpi', \\ r &= x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' - \varpi'', \\ s &= x\cos\alpha''' + y\cos\beta''' + z\cos\gamma''' - \varpi''', \end{aligned} \right.$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ désignant les cosinus directeurs de la nor-

male au plan $p = 0$ et ϖ sa distance à l'origine, etc. En appelant a, b, c, d les aires des faces du tétraèdre formé des quatre plans en question, qu'on appelle *tétraèdre de référence,* on a

$$(2) \qquad ap + bq + cr + ds = V,$$

V désignant le triple du volume du tétraèdre de référence. Des trois premières formules (1) on peut tirer x, y, z en fonction de p, q, r sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} x = A\,p + B\,q + C\,r + D, \\ y = A'p + B'q + C'r + D', \\ z = A''p + B''q + C''r + D''. \end{cases}$$

Cela est évident; toutefois, on peut prouver directement que le déterminant $\Sigma(\pm \cos\alpha \cos\beta' \cos\gamma'')$ n'est pas nul, son carré pouvant s'écrire

$$\begin{vmatrix} \Sigma \cos^2\alpha & \Sigma \cos\alpha \cos\alpha' & \Sigma \cos\alpha \cos\alpha'' \\ \Sigma \cos\alpha \cos\alpha' & \Sigma \cos^2\alpha' & \Sigma \cos\alpha' \cos\alpha'' \\ \Sigma \cos\alpha \cos\alpha'' & \Sigma \cos\alpha' \cos\alpha'' & \Sigma \cos^2\alpha'' \end{vmatrix}$$

ou, en appelant λ, μ, ν les angles des directions α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'',

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

ou enfin

$$1 + 2\cos\lambda \cos\mu \cos\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu.$$

Cette quantité peut s'écrire

$$-[(\cos\lambda - \cos\mu \cos\nu)^2 + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 1 - \cos^2\mu \cos^2\nu]$$

ou

$$-[(\cos\lambda - \cos\mu \cos\nu)^2 - \sin^2\mu \sin^2\nu]$$

ou

$$4 \sin\frac{\lambda + \mu + \nu}{2} \sin\frac{\mu + \nu - \lambda}{2} \sin\frac{\lambda + \nu - \mu}{2} \sin\frac{\lambda + \mu - \nu}{2}.$$

Elle ne peut être nulle, à moins que $\lambda + \mu + \nu = 2\pi$ ou que

$\mu + \nu - \lambda = 0, \ldots$, ce qui n'a jamais lieu pour les faces d'un trièdre proprement dit; or λ, μ, ν sont les faces du trièdre supplémentaire de celui des plans $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$.

Ceci posé, si l'on considère une équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

elle pourra se mettre, à l'aide des formules (3), sous la forme

$$f(\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r + \mathrm{D}, \ldots) = 0$$

ou, en vertu de (2), sous la forme homogène

$$f\left[\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{V}}(ap + bq + cr + ds), \ldots\right] = 0.$$

Ainsi toute surface peut être représentée par une équation homogène de la forme

$$\varphi(p, q, r, s) = 0; \tag{4}$$

p, q, r, s sont alors les *coordonnées tétraédriques* du point (x, y, z) de cette surface, et l'équation précédente est celle de la surface en coordonnées tétraédriques.

Toute surface peut être représentée par une équation telle que (4), mais la réciproque n'est pas vraie; ainsi l'équation

$$ap + bq + cr + ds = 0$$

ne représente rien du tout, puisque son premier membre, en vertu de (2), est égal à la constante V; néanmoins, on convient de dire que cette équation du premier degré représente le *plan de l'infini*.

Ce que nous avons dit au sujet des coordonnées trilinéaires, en Géométrie plane, peut nous dispenser d'entrer, au sujet de cette locution de *plan de l'infini*, dans de plus amples détails.

VII. — Plans tangents en coordonnées polyédriques.

Il arrive souvent que l'équation d'une surface se présente sous la forme

$$f(p, q, r, \ldots) = 0,$$

$p, q, r, \ldots$ désignant les distances d'un point (x, y, z) de la surface à des plans fixes ou ses coordonnées polyédriques; l'équation du plan tangent prend alors une forme remarquable et souvent utile que nous allons faire connaître : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx} + \ldots.$$

Supposons que l'on ait

$$\begin{aligned} p &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \varpi, \\ q &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - \varpi', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

la formule précédente deviendra

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\alpha' + \ldots,$$

et l'on aura deux formules analogues pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Si l'on appelle alors P, Q, ... ce que deviennent $p, q, \ldots$ quand on y fait $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, on aura

$$\begin{aligned} &(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial p}[(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma] \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial q}[(X - x)\cos\alpha' + (Y - y)\cos\beta' + (Z - z)\cos\gamma'] + \ldots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} + (Z - z)\frac{\partial f}{\partial z} \\ &\quad = \frac{\partial f}{\partial p}(P - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(Q - q) + \ldots. \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent prend donc la forme

$$\frac{\partial f}{\partial p}(P - p) + \frac{\partial f}{\partial q}(Q - q) + \ldots = 0,$$

et, si la fonction f, ce qui est le cas ordinaire, est homogène, $\frac{\partial f}{\partial p}p + \frac{\partial f}{\partial q}q + \ldots$ sera égal à f multiplié par le degré de l'ho-

mogénéité, c'est-à-dire à zéro; l'équation du plan tangent deviendra alors

$$P\frac{\partial f}{\partial p}+Q\frac{\partial f}{\partial q}+R\frac{\partial f}{\partial r}+\ldots=0.$$

Dans le système de coordonnées tétraédriques, on trouve, comme plus haut, la condition pour qu'un plan soit tangent à une surface; nous ne reprendrons pas ici des calculs déjà faits.

On peut démontrer relativement aux surfaces un théorème analogue à celui que nous avons démontré en Géométrie plane et qui est dû à Poinsot :

Théorème. — *Si p, q, r, ... désignent les distances du point* M *à des surfaces fixes* P, Q, R, ... (*en appelant distance d'un point à une surface la normale abaissée de ce point sur la surface*), *l'équation*

$$f(p, q, r, \ldots)=0$$

représentera, en général, une surface, et la normale au point M *sera la résultante de longueurs, égales à* $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, \ldots,$ *portées sur les droites p, q, ... dans un sens ou dans le sens opposé, suivant leur signe.*

Soient, en effet, a, b, c les coordonnées du pied de la normale p sur la surface P; a', b', c' les coordonnées du pied de la normale q sur la surface Q, ...; on aura

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dx}+\ldots.$$

Or

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

$$(2)\quad dp=\frac{1}{p}[(x-a)(dx-da)+(y-b)(dy-db)+(z-c)(dz-dc)];$$

mais la direction da, db, dc est celle d'un déplacement

effectué sur la surface P; tandis que $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sont les cosinus directeurs de la normale p, que nous appellerons $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; on a donc

$$\frac{x-a}{p}\,da + \frac{y-b}{p}\,db + \frac{z-c}{p}\,dc = 0,$$

et (2) devient

$$\begin{aligned} dp &= \frac{1}{p}\left[(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz\right] \\ &= \cos\alpha\,dx + \cos\beta\,dy + \cos\gamma\,dz; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\frac{dp}{dx} = \cos\alpha, \qquad \frac{dp}{dy} = \cos\beta, \qquad \frac{dp}{dz} = \cos\gamma.$$

La formule (1) devient alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial q}\cos\alpha' + \ldots,$$

α, α', α'', ... désignant les angles que font p, q, r, ... avec l'axe des x. On voit que la longueur

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

portée sur la normale à $f = 0$, et qui a pour projection sur l'axe des x, $\frac{\partial f}{\partial x}$, est la résultante de $\frac{\partial f}{\partial p}$, $\frac{\partial f}{\partial q}$, ... portées sur les droites p, q, ..., car ce que l'on a dit de l'axe des x peut se dire pour l'axe des y et l'axe des z. C. Q. F. D.

Application. — *Trouver le plus court chemin d'un point à un autre en touchant une surface donnée.*

Prenons des coordonnées tripolaires. Le premier pôle sera au point de départ, le second au point d'arrivée et le troisième sera quelconque; l'équation de la surface sera

$$f(p, q, r) = 0.$$

Ce qu'il faut rendre minimum, c'est $p + q$; on posera donc

$$dp + dq = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} dp + \frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial r} dr = 0.$$

La méthode des multiplicateurs donnera

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial q}, \qquad \frac{\partial f}{\partial r} = 0;$$

or, si l'on veut mener la normale à la surface au point où le chemin cherché la rencontre, il faudra porter sur les rayons p, q des longueurs égales, sur le rayon r une longueur nulle et composer ces longueurs. Cela prouve que la normale à la surface partage l'angle du chemin cherché en deux parties égales et que le chemin en question est situé dans un plan normal passant par le point de départ et le point d'arrivée.

Le chemin cherché serait donc précisément la route que suivrait le rayon lumineux réfléchi par la surface, et qui, émané du point de départ, aboutirait au point d'arrivée.

VIII. — Surfaces podaires, surfaces parallèles.

Soient O un point fixe, S une surface fixe; le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les plans tangents à la surface S est ce que l'on appelle la *surface podaire* de la surface S par rapport au point O.

Soient P *le plan tangent à la surface* S *en* M, *et* π *le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur* P; *il est facile de voir que la normale en* π *à la podaire passe par le milieu de* OM.

Soient, en effet, α, β, γ les coordonnées de M; x, y, z celles de π; on aura

$$(1) \qquad p(x - \alpha) + q(y - \beta) = z - \gamma,$$

formule où l'on a posé, pour abréger, $p = \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha}$, $q = \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}$; on aura aussi

$$(2)\qquad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{-1}.$$

Calculons $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$. A cet effet, écrivons (2) ainsi

$$(3)\qquad x + pz = 0, \qquad y + qz = 0,$$

et différentions (1) et (3); nous aurons

$$dp(x-\alpha) + dq(y-\beta) + p(dx - d\alpha) + q(dy - d\beta) = dz - d\gamma,$$
$$dx + p\,dz + z\,dp = 0,$$
$$dy + q\,dz + z\,dq = 0;$$

remplaçons d'abord $d\gamma$ par $p\,d\alpha + q\,d\beta$, nous aurons

$$dp(x-\alpha) + dq(y-\beta) + p\,dx + q\,dy = dz.$$

Multiplions par z et éliminons dp, dq; nous aurons

$$(dx + p\,dz)(x-\alpha) + (dy + q\,dz)(y-\beta) = (p\,dx + q\,dy - dz)z;$$

donc

$$dz = \frac{[pz - (x-\alpha)]dx + [qz - (y-\beta)]dy}{p(x-a) + q(y-b) + z}$$

ou, en vertu de (1) et (3),

$$dz = -\frac{(2x-\alpha)dx + (2y-\beta)dy}{2z-\gamma}.$$

On a donc

$$dx(2x-\alpha) + dy(2y-\beta) + dy(2z-\gamma) = 0,$$

ce qui prouve que le déplacement dx, dy, dz effectué sur la surface podaire ou le plan tangent à la surface podaire est perpendiculaire à la direction $x - \frac{\alpha}{2}$, $y - \frac{\beta}{2}$, $z - \frac{\gamma}{2}$, qui joint le point (x, y, z) au point $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)$ milieu de OM.

C. Q. F. D.

Soit M un point quelconque d'une surface S, soit MN la normale en M; si l'on prend MN = const., le lieu des points N sera une surface Σ, à laquelle on donne le nom de *surface parallèle* à S.

Les points M et N sont ce que l'on appelle des *points correspondants*.

Théorème. — *Les plans tangents en deux points correspondants de deux surfaces parallèles sont parallèles.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées du point M appartenant à la surface S; soient x', y', z' les coordonnées du point correspondant N sur la surface parallèle, l la longueur de la droite constante qui a pour extrémités M et N; on a

$$x' = x + l\alpha, \qquad y' = y + l\beta, \qquad z' = z + l\gamma,$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale à la surface S; on en déduit

$$dx' = dx + l\,d\alpha, \qquad dy' = dy + l\,d\beta, \qquad dz' = dz + l\,d\gamma.$$

Multipliant la première équation par α, la deuxième par β, la troisième par γ, ajoutant et observant que l'on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et par suite, en différentiant,

$$\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta + \gamma\,d\gamma = 0,$$

on trouvera

$$\alpha\,dx' + \beta\,dy' + \gamma\,dz' = \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz.$$

Or la direction dx, dy, dz située dans le plan tangent à S est perpendiculaire à α, β, γ; donc $\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz$ est nul; par suite $\alpha\,dx' + \beta\,dy' + \gamma\,dz'$ est nul aussi; donc la direction dx', dy', dz', située dans le plan tangent à la surface parallèle, est normale à α, β, γ; donc enfin ce plan tangent est parallèle à celui de S. C. Q. F. D.

IX. — De la transformation par rayons vecteurs réciproques.

En Géométrie dans l'espace, comme en Géométrie plane, deux figures sont transformées l'une de l'autre par *rayons vecteurs réciproques*, quand au point M de l'une des figures correspond un point M' de l'autre, tel que la droite MM' passe par un point fixe O, et tel que l'on ait

$$\mathrm{OM}.\mathrm{OM}' = k^2.$$

k est le *module* de la transformation, le point O est le *pôle*.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires du point M; x', y', z' celles du point M'; on a, en posant

$$\mathrm{OM} = r, \qquad \mathrm{OM}' = r',$$

et en supposant les trois axes de coordonnées passant en O,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} = \frac{rr'}{r'^2} = \frac{k^2}{r'^2},$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{k^2 x'}{r'^2}$$

et

$$(1) \quad \begin{cases} x = \dfrac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, & x' = \dfrac{k^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ y = \dfrac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, & y' = \dfrac{k^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ z = \dfrac{k^2 z'}{x'^2 + y'^2 + z'^2}, & z' = \dfrac{k^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}; \end{cases}$$

telles sont les formules de transformation.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation

$$ax + by + cz + d = 0,$$

on trouve

$$ax' + by' + cz' + \frac{d}{k^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0;$$

la transformée d'un plan est donc une sphère passant par le pôle.

Si l'on fait la même substitution dans

$$ax + by + cz + d + (x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

on trouve

$$\frac{k^2}{r'^2}(ax' + by' + cz') + d + \frac{k^4}{r'^4}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

ou

$$k^2(ax' + by' + cz') + dr'^2 + k^4 = 0,$$

ce qui est encore l'équation d'une sphère. Ainsi : *la transformée d'une sphère est une autre sphère, excepté dans le cas où cette sphère passe par le pôle; sa transformée est alors un plan.*

Il résulte de là que la transformée d'une droite est un cercle et que la transformée d'un cercle est un cercle ou une droite.

Voici un curieux théorème que nous mentionnons à cause de ses applications :

Théorème. — *Deux courbes ou deux surfaces quelconques se coupent sous le même angle que leurs transformées par rayons vecteurs réciproques.*

On appelle *angle de deux courbes* en un point commun l'angle de leurs tangentes (ou de leurs cordes infiniment petites) en ce point; on appelle *angle de deux surfaces*, en un point commun à ces deux surfaces, l'angle de leurs plans tangents en ce point.

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffira donc de démontrer que, si l'on considère trois points infiniment voisins et leurs correspondants, les deux triangles formés par ces points sont semblables, car alors leurs côtés se couperont sous les mêmes angles.

Soient deux côtés correspondants $MN = s$ et $M'N' = s'$; soient $OM = r$, $OM' = r'$; les deux triangles OMN et O'M'N'

sont évidemment semblables, puisque les quatre points M, N, M', N' sont sur la même circonférence, à cause de l'égalité

$$OM \times OM' = ON \times ON' = k^2;$$

on a donc

$$\frac{s}{s'} = \frac{r}{r'}$$

ou, en appelant G le rapport $\frac{r}{r'}$, $s = Gs'$: les droites s et s' correspondantes sont donc proportionnelles; deux triangles formés par de petites droites, telles que nous venons de les considérer, seront semblables. C. Q. F. D.

Ce théorème peut être utilisé pour simplifier la recherche de quelques plans tangents; on peut le démontrer par l'analyse.

En effet, supposons que le point (x, y, z) décrive un élément ds; le point (x', y', z') décrira un élément ds', et l'on aura

$$\begin{aligned}
ds'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \\
&= k^4\left[\left(d\frac{x}{r^2}\right)^2 + \left(d\frac{y}{r^2}\right)^2 + \left(d\frac{z}{r^2}\right)^2\right] \\
&= \frac{k^4}{r^8}\left[(r^2dx - 2xr\,dr)^2 + (r^2dy - 2yr\,dr)^2 + (r^2dr - 2zr\,dr)^2\right] \\
&= \frac{k^4}{r^8}\left[r^4ds^2 - 4r^3dr(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + 4r^4dr^2\right] \\
&= \frac{k^4}{r^8}r^4ds^2 = \frac{k^4}{r^4}ds^2;
\end{aligned}$$

ds' est donc proportionnel à ds; un triangle infinitésimal de la figure x, y, z aura donc pour transformée un autre triangle semblable et par suite ce triangle transformé aura les mêmes angles que le triangle primitif; donc deux éléments de courbe se coupent suivant le même angle que leurs transformées.

C. Q. F. D.

X. — Projection stéréographique.

Considérons une sphère, un grand cercle et le pôle O de ce grand cercle. Joignons le point O à un point M quel-

conque de la sphère : la droite OM rencontrera le plan du grand cercle en un point m qui sera, pour un œil placé en O, la perspective du point M sur le plan du grand cercle considéré comme tableau. On dit que m est la projection stéréographique du point M.

La projection stéréographique d'une figure tracée sur la sphère est le lieu des projections de ses divers points. Les cartes géographiques sont souvent les projections stéréographiques des pays qu'elles représentent. Toutes les propriétés des projections stéréographiques découlent du théorème suivant :

Théorème. — *La projection stéréographique d'une figure tracée sur la sphère est la transformée par rayons vecteurs réciproques de cette figure, le pôle étant le pôle du grand cercle sur lequel on fait la projection; le module de la transformation est le rayon de la sphère.*

Nous laissons au lecteur le soin de faire la démonstration; mais nous en conclurons que les projections stéréographiques des cercles de la sphère sont des cercles qui se coupent sous le même angle que les cercles dont ils sont les projections. Ces propriétés peuvent servir au tracé des méridiens et des parallèles des cartes géographiques.

XI. — Théorème de Y. Villarceau et ses conséquences.

Le *tore* est la surface engendrée par la révolution d'un cercle autour d'un axe situé dans son plan; Villarceau a remarqué le premier que *tout plan bitangent coupe le tore suivant deux cercles.*

Soit $C = 0$, l'équation d'un cercle situé dans le plan des zx; la surface engendrée par la révolution de ce cercle autour de l'axe des z sera

$$C_1 = 0,$$

C_1 désignant ce que devient C quand on y change x en $\sqrt{x^2+y^2}$; donc :

L'équation du tore est du quatrième degré

et, plus généralement,

Si l'on fait tourner une conique autour d'un axe situé dans son plan, elle engendrera une surface du quatrième degré.

Le tore a évidemment pour ligne double le cercle imaginaire à l'infini, car son méridien, se composant de deux cercles, passe deux fois par les ombilics de son plan; un plan bitangent coupera donc le tore suivant une courbe du quatrième degré ayant quatre points doubles, à savoir : 1° les deux ombilics; 2° les deux points de contact, l'intersection devra donc se dédoubler en coniques passant par les ombilics, c'est-à-dire en deux cercles.

Transformons maintenant le tore par rayons vecteurs réciproques en plaçant le pôle sur l'axe de révolution; sa transformée sera encore une surface de révolution, dont le méridien sera un cercle; en d'autres termes, la transformée sera encore un tore. Concevons maintenant que l'on mène au tore primitif une sphère bitangente; on pourra toujours choisir le pôle de manière que, dans la figure transformée, la sphère soit remplacée par un plan bitangent qui coupera le tore suivant deux cercles : ces cercles seront les transformées des sections du tore par la sphère. On a donc ce théorème qui dérive de celui de Villarceau :

Un tore est coupé par une sphère bitangente suivant un système de deux cercles.

Quoique cela sorte un peu de notre sujet, nous ferons remarquer que la surface de révolution qui a pour méridien une conique est coupée par un plan bitangent suivant deux coniques. En effet, le plan bitangent coupe cette surface sui-

il suffit de rendre homogènes les équations de la courbe et d'éliminer entre ces équations la variable introduite pour rendre les formules homogènes.

THÉORÈME I. — *Tout plan tangent au cône passe par le sommet; et, réciproquement, toute surface dont le plan tangent passe par un point fixe est un cône ayant pour sommet le point fixe en question.*

En effet, soit

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface conique ayant son sommet en a, b, c; quand deux fonctions $\frac{x-a}{z-c}$, $\frac{y-b}{z-c}$ dépendent l'une de l'autre, leur déterminant (t. I, p. 167)

$$\frac{\partial\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right)}{\partial(x, y)}$$

est nul; on doit donc avoir, en posant $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{z-c} - p\frac{x-a}{(z-c)^2} & -p\frac{y-b}{(z-c)^2} \\ -q\frac{x-a}{(z-c)^2} & \frac{1}{z-c} - q\frac{y-b}{(z-c)^2} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

ou bien

$$z - c - p(x-a) - q(y-b) = 0. \tag{3}$$

Cette équation exprime bien que le plan tangent en x, y, z, qui a pour équation

$$Z - z - p(X-x) - q(Y-y) = 0,$$

passe en a, b, c. Réciproquement, si le plan tangent au point (x, y, z) d'une surface passe par le point a, b, c, entre x, y et z de cette surface, on aura la relation (3) qui peut

se mettre sous la forme (2), laquelle exprime que le détermi-nant de $\frac{x-a}{z-c}$ et de $\frac{y-b}{z-c}$ est nul, c'est-à-dire qu'il existe entre ces fonctions une relation telle que (2); en d'autres termes, la surface en question est un cône ayant son sommet en a, b, c.

C. Q. F. D.

L'équation (3) est importante, elle caractérise les surfaces coniques, comme on vient de le voir, et porte le nom d'*équation* aux *dérivées partielles des surfaces coniques*. Si l'on suppose l'équation d'une surface conique mise sous la forme

$$(4)\qquad f(x, y, z) = 0,$$

on en déduit

$$p = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial z}, \qquad q = -\frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

et la formule (3) peut s'écrire

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-c) = 0;$$

cette formule exprime aussi bien que (3) que le plan tangent passe par le point fixe (a, b, c); mais il faut supposer $f = 0$.

THÉORÈME II. — *Le plan tangent au cône est le même tout le long d'une génératrice.*

En effet, soit

$$f\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

l'équation d'un cône; différentions successivement cette équation par rapport à x et y; en faisant toujours

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-c} = \alpha, \quad \frac{y-b}{z-c} = \beta,$$

nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{z-c} - p\frac{x-a}{(z-c)^2}\right] - \frac{\partial f}{\partial \beta} p \frac{y-b}{(z-c)^2} = 0.$$

On voit que p est fonction de $\frac{x-a}{z-c}$ et de $\frac{y-b}{z-c}$; il en est évidemment de même de q; enfin, en vertu de l'équation

$$z-c-p(x-a)-q(y-b)=0,$$

il en est de même de $z-px-qy$: le plan tangent

$$Z-z-p(X-x)-q(Y-y)=0$$

a donc ses trois coefficients, p, q, $z-px-qy$ fonctions de $\frac{x-a}{z-c}$ et de $\frac{y-b}{z-c}$, quantités qui sont les mêmes tout le long d'une génératrice; donc le plan tangent reste le même tout le long d'une génératrice.

Théorème III. — *Le sommet d'un cône est un point singulier.*

Considérons en effet l'équation d'un cône sous la forme

$$f(x-a, y-b, z-c)=0.$$

Si l'on suppose la surface algébrique, cette équation sera une somme de termes de même degré et de la forme

$$A(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma};$$

il est bien clair alors que, pour $x=a$, $y=b$, $z=c$, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Si la surface n'est pas algébrique, on mettra le fait en évidence en observant qu'en vertu du théorème II le plan tangent doit être indéterminé.

Problème. — *Reconnaître si une surface donnée par son équation est conique.*

Si la surface est donnée par une équation toute résolue par rapport à z, pour qu'elle soit conique, il faut que z, p et q tirés de l'équation de la surface rendent l'équation

$$z-c-p(x-a)-q(y-b)=0$$

identique en x et y pour des valeurs de a, b, c (p. 252). Si la surface est donnée par une équation de la forme

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit conique est que l'on ait

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(z-c) = 0$$

pour les valeurs de z tirées de (1) en fonction de x et y, quels que soient x et y, pour des valeurs convenablement choisies de a, b, c.

Pour exprimer que la surface représentée par (1) est conique, il faudra donc éliminer z entre (1) et (2) et exprimer que la résultante est identique.

Si l'équation (1) est de forme entière, on pourra simplifier les calculs en observant que, si elle représente un cône, les coordonnées du sommet devront satisfaire aux équations

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad f = 0.$$

(Si ces équations ne peuvent être satisfaites à la fois, la surface $f = 0$ ne peut être un cône.) Soit a, b, c une solution; en transportant l'origine en a, b, c, l'équation devra devenir homogène en x, y, z.

C'est au fond la marche que l'on suit dans la théorie des surfaces du second ordre quand on veut exprimer que l'équation du second degré représente un cône, et l'on prouve que, si pour une surface du second ordre les équations (3) ont lieu, la surface est un cône.

XIII. — Surfaces cylindriques.

On sait que l'on appelle *cylindres* ou *surfaces cylindriques* les surfaces engendrées par une droite ou *génératrice* qui se meut dans l'espace, parallèlement à elle-même.

Soient

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az + \alpha, \\ y = bz + \beta \end{cases}$$

les équations de la génératrice d'un cylindre; cette génératrice restant parallèle à une direction fixe, a et b restent constants, α et β seuls varient et le mouvement de la génératrice sera réglé en se donnant une relation

$$(2) \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

entre α et β. La résultante provenant de l'élimination de α et β entre (1) et (2) donnera l'équation de la surface; cette résultante est

$$(3) \qquad \varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

Ordinairement la génératrice est assujettie à rencontrer une courbe appelée *directrice;* soient

$$(4) \qquad f = 0, \qquad g = 0$$

ses équations. En éliminant x, y, z entre (1) et (4), on obtient l'équation (2) qui exprime que la droite (1) se meut en rencontrant la courbe (4).

L'équation (3) des cylindres est, comme l'on voit, une relation entre deux fonctions linéaires de x, y, z. Réciproquement, on sait que toute relation entre deux fonctions linéaires représente un cylindre : c'est ce que l'on peut voir soit par une transformation de coordonnées, soit en observant qu'une relation telle que

$$\varphi(X, Y) = 0$$

est la résultante des équations

$$X = \alpha, \qquad Y = \beta, \qquad \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

et qu'elle représente le lieu des lignes $X = \alpha$, $Y = \beta$; et que si X et Y sont des fonctions linéaires, $X = \alpha$, $Y = \beta$ représentent des droites qui restent parallèles à la droite $X = 0$, $Y = 0$.

THÉORÈME I. — *Tout plan tangent au cylindre contient la génératrice du point de contact et par suite reste parallèle à une droite de direction fixe.*

En effet, soit

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'un cylindre. Cette équation établissant une relation entre les fonctions $x - az$, $y - bz$, on aura (p. 167, t. I)

$$\frac{\partial(x - az, y - bz)}{\partial(x, y)} = 0 \tag{2}$$

ou, en appelant p et q les dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$,

$$\begin{vmatrix} 1 - ap & -bp \\ -aq & 1 - bq \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

ou

$$1 - ap - bq = 0. \tag{4}$$

Cette équation exprime bien que la direction de la normale $p, q, -1$ est perpendiculaire à la direction constante $a, b, 1$, ou, si l'on veut, que le plan tangent est parallèle à cette direction, qui est celle de la génératrice du point de contact. Il contient donc cette génératrice tout entière, puisqu'il en contient un point. Réciproquement :

THÉORÈME II. — *Si le plan tangent à une surface reste parallèle à une droite fixe, cette surface est cylindrique.*

En effet, soient a, b, 1 des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la droite à laquelle le plan tangent reste parallèle; on aura entre les coefficients directeurs p, q, -1 du plan tangent la relation (4), qui peut se mettre sous la forme (3) ou (2), laquelle exprime qu'il existe entre $x - az$ et $y - bz$ une relation telle que (1) et par suite que la sur face est cylindrique.

L'équation (4) est caractéristique des surfaces cylindriques;

on l'appelle l'*équation différentielle,* ou *aux dérivées partielles* des surfaces cylindriques; on peut lui donner la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial z} + a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

si l'équation de la surface est

$$(6) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Comme (4), elle exprime que la direction $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ de la normale est perpendiculaire à une direction fixe. Elle peut, à l'instar de (4), servir à reconnaître si une surface est cylindrique.

Pour que la surface représentée par (6) soit cylindrique, il faut que z et ses dérivées, portées dans (4), rendent cette équation identique pour des valeurs de a et b; ou, si l'on veut, que la valeur de z tirée de (6) et portée dans (5) rende cette formule identique, pour certaines valeurs de a et b; $a, b, -1$ seront alors proportionnels aux cosinus directeurs des génératrices de la surface cylindrique.

XIV. — Cônes et cylindres circonscrits.

Deux surfaces sont dites *circonscrites* l'une à l'autre suivant une courbe commune C, dite *courbe* de *contact,* quand, en tous les points de cette courbe C, elles ont même plan tangent.

Problème I. — *Par un point donné mener un plan tangent à la surface représentée par l'équation*

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Ce problème est, en général, indéterminé; car la condition d'être tangent à une surface est simple (p. 233); ainsi il y

aura une infinité de plans satisfaisant à la question. Soient toujours

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

et

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

l'équation d'un plan tangent à la surface considérée; exprimons que ce plan passe par le point ayant pour coordonnées a, b, c. Nous aurons

$$(2) \qquad c - z = p(a - x) + q(b - y);$$

cette équation, jointe à celle de la surface, fera connaître l'x, l'y et le z du point de contact; ce point est indéterminé de position, et tous les points de la courbe représentée par les équations (1) et (2) sont des points de contact également possibles.

Par suite, *les équations* (1) *et* (2) *sont les équations de la courbe de contact du cône circonscrit à la surface représentée par l'équation* $f = 0$, *ayant son sommet au point* a, b, c.

En effet, l'équation (2) exprime que le plan tangent à la surface en x, y, z passe par a, b, c; il est donc le même que celui d'une surface conique dont le sommet est en a, b, c et dont la directrice est le lieu des points x, y, z représenté par les équations (1) et (2). En d'autres termes, le cône qui a pour sommet le point a, b, c et pour directrice la courbe (1), (2) est circonscrit à la surface. C. Q. F. D.

On peut évidemment remplacer l'équation (2) par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(z - c) = 0$$

ou, en employant des coordonnées homogènes, par

$$a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z} + \tau\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

où l'on suppose $\tau = 1$, $t = 1$.

L'équation (2) n'étant autre chose que l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques, on voit que :

L'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques, dans laquelle on remplace p et q par le p et le q d'une surface quelconque, représente la courbe de contact d'un cône circonscrit à cette surface dont le sommet est le point a, b, c.

Supposons la surface $f = 0$ algébrique et de degré m, l'équation (2) est alors algébrique et de degré $m - 1$; on peut donc dire que :

Si d'un point donné comme sommet on circonscrit un cône à une surface algébrique de degré m, la courbe de contact sera sur une surface d'ordre m — 1.

Cette surface d'ordre $m - 1$ est ce que l'on appelle la *polaire du point a, b, c* par rapport à la surface (1).

La théorie des surfaces polaires d'une surface donnée, par rapport à un point, est tout à fait analogue à celle que nous avons développée à propos des courbes polaires en Géométrie plane; nous ne développerons pas cette théorie.

Problème II. — *Trouver l'équation du cône circonscrit à une surface donnée par son équation*

$$f(x, y, z) = 0,$$

et ayant pour sommet le point de coordonnées a, b, c.

Nous venons de voir comment on pouvait trouver les équations de la courbe suivant laquelle le cône touche la surface, et par suite comment on pouvait trouver une directrice du cône; rien n'est plus facile alors que de trouver l'équation du cône lui-même.

Autrement, par le sommet a, b, c faisons passer la droite

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{x-a}{\alpha} = \dfrac{y-b}{\beta} = \dfrac{z-c}{\gamma} = \rho, \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \end{cases}$$

Les génératrices du cône sont tangentes à la surface $f=0$; car, contenues dans le plan tangent commun aux deux surfaces, elles sont tangentes à l'une et à l'autre. Exprimons que la droite (1) rencontre la surface en deux points confondus; pour cela, formons l'équation en ρ

$$f(a+\alpha\rho,\ b+\beta\rho,\ c+\gamma\rho)=0.$$

Exprimons qu'elle a deux racines égales, en éliminant ρ entre cette équation et sa dérivée

$$\alpha\frac{\partial f}{\partial a}+\beta\frac{\partial f}{\partial b}+\gamma\frac{\partial f}{\partial c}=0;$$

nous aurons une équation de la forme

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=0. \tag{2}$$

En éliminant α, β, γ entre (1) et (2), on aura le lieu cherché, c'est-à-dire le cône circonscrit : nous verrons plus loin une autre méthode pour résoudre la même question.

Appliquons ces considérations à la surface représentée par l'équation $f=\sum a_{ij}x_ix_j=0$ (où l'on pose, pour abréger, $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$, $x_4=t=1$), on a

$$f(a+\alpha\rho,\ \ldots)=\rho^2\varphi+\rho\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial a}+\beta\frac{\partial f}{\partial b}+\gamma\frac{\partial f}{\partial c}\right)+f(a,b,c)=0,$$

φ désignant les termes du second degré dans $f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. L'équation dérivée en ρ n'a pas besoin d'être formée, et, pour que l'équation précédente ait des racines égales, il faut que

$$\left(\alpha\frac{\partial f}{\partial a}+\beta\frac{\partial f}{\partial b}+\gamma\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2=4f(a,b,c)\varphi(\alpha,\beta,\gamma).$$

Cette équation étant homogène en α, β, γ, on élimine facilement ces quantités, et l'on a

$$\left[(x-a)\frac{\partial f}{\partial a}+(y-b)\frac{\partial f}{\partial b}+(z-c)\frac{\partial f}{\partial c}\right]^2 = 4f\varphi[(x-a),(y-b),(z-c)]$$

ou

$$\left(x\frac{\partial f}{\partial a}+y\frac{\partial f}{\partial b}+z\frac{\partial f}{\partial c}+t\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)^2=4f(a,b,c)f(x,y,z).$$

Cette méthode fournit souvent des solutions étrangères.

Problème III. — *Mener à une surface un plan tangent parallèle à une droite donnée.*

En raisonnant comme tout à l'heure, on verra que

$$ap+bq=1$$

ou

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

est la courbe de contact du cylindre circonscrit dont les génératrices sont parallèles à la direction a, b, 1 et que tous les points de cette courbe sont des points de contact admissibles.

L'équation du cylindre circonscrit peut s'obtenir soit en partant de la connaissance de la courbe de contact, soit en exprimant que la droite

$$x=az+p,\qquad y=bz+q$$

rencontre la surface en deux points confondus et en cherchant le lieu de cette droite.

Problème IV. — *Mener par une droite donnée un plan tangent à une surface donnée.*

L'équation de la surface étant $f=0$, celle d'un plan tangent est

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+T\frac{\partial f}{\partial t}=0;$$

si x_0, y_0, z_0, t_0 et x_1, y_1, z_1, t_1 sont les coordonnées de deux points appartenant à la droite, on aura

$$x_0\frac{\partial f}{\partial x}+y_0\frac{\partial f}{\partial y}+z_0\frac{\partial f}{\partial z}+t_0\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}+t_1\frac{\partial f}{\partial t}=0;$$

ces deux équations, jointes à celles de la surface, détermineront les points de contact. Ils sont au nombre de $m(m-1)^2$ si la surface est algébrique de degré m, et se trouvent sur l'intersection des courbes de contact des cônes circonscrits ayant leurs sommets en x_0, y_0, z_0 et x_1, y_1, z_1.

On appelle *classe* d'une surface le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite; si la surface est d'ordre m, on voit que sa classe sera au plus $m(m-1)^2$.

Nous verrons plus loin qu'il existe des surfaces auxquelles on ne peut pas mener de plans tangents par une droite donnée; mais ces surfaces sont les développables dont il a déjà été question, et leur classe se détermine par d'autres considérations.

Si la droite était donnée par deux plans, qui la contiennent,

$$aX + bY + cZ + dT = 0, \qquad a'X + b'Y + c'Z + d'T = 0,$$

on aurait les équations suivantes pour déterminer les points de contact :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

Problème V. — *Par un point donné, mener une normale à une surface donnée.*

Soient

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface, $\frac{\partial f}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = f_2$ et $\frac{\partial f}{\partial z} = f_3$, α, β, γ les coordonnées du point donné. Les équations de la normale sont

$$\frac{X-x}{f_1} = \frac{Y-y}{f_2} = \frac{Z-z}{f_3};$$

exprimons que cette normale passe par le point α, β, γ; nous aurons

$$(2) \qquad \frac{\alpha-x}{f_1} = \frac{\beta-y}{f_2} = \frac{\gamma-z}{f_3}.$$

Ces équations, jointes à (1), détermineront le pied x, y, z de la normale sur la surface; les équations (1) et (2) sont de degré m en x, y, z : elles fourniront donc m^3 solutions; mais, parmi ces solutions, il y en a $m(m-1)$ étrangères à la question, ainsi que l'a remarqué O. Terquem (*Journal de Liouville*, 1re série, t. IV).

Supposons, en effet, le point (α, β, γ) à l'origine; les équations (2) se réduiront à

$$(3) \qquad \frac{x}{f_1} = \frac{y}{f_2} = \frac{z}{f_3};$$

mais (1) peut s'écrire

$$(4) \qquad f(x, y, 0) + z f_3(x, y, 0) + \ldots = 0,$$

et les équations (3), (4) sont satisfaites en posant

$$z = 0, \qquad f(x, y, 0) = 0, \qquad f_3 = 0.$$

Les solutions de ces équations, au nombre de $m(m-1)$, sont évidemment étrangères à la question, et par suite :

Par un point donné on ne peut mener que $m^3 - m^2 + m$ normales à une surface de degré m.

XV. — Du contour apparent des surfaces.

Supposons qu'un observateur ait son œil au sommet du cône circonscrit à une surface, la ligne de contact lui paraîtra délimiter cette surface; aussi peut-on lui donner le nom de *contour apparent de la surface.*

Supposons que l'on coupe le cône circonscrit par un plan (ou même par une surface courbe); la trace de ce cône sera la *perspective* du *contour apparent* de la surface ou ce que l'on appelle le *contour apparent de la surface sur le plan en question* (ou sur la surface).

L'œil peut être à l'infini : le contour apparent est alors la trace d'un cylindre circonscrit à la surface.

On considère le plus souvent en Analyse les contours apparents des surfaces sur les plans coordonnés; ce sont alors les traces de cylindres circonscrits ayant leurs génératrices parallèles aux axes.

Proposons-nous de trouver le contour apparent de la surface $f(x, y, z) = 0$ sur le plan des xy. L'équation de ce contour sera l'une des équations de la courbe de contact d'un cylindre circonscrit et dont la génératrice serait parallèle à la direction 0, 0, 1; l'équation de cette courbe est, comme on l'a vu (p. 262),

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

En éliminant z entre cette équation et $f = 0$, on aura la courbe cherchée. Donc *le contour apparent est l'enveloppe des projections des sections parallèles au plan des xy sur ce plan.* (Cette règle n'est évidemment pas sans exception.)

XVI. — Surfaces de révolution.

On sait qu'une surface de révolution est engendrée par une courbe qui tourne autour d'un axe de manière que tous ses points décrivent des cercles ayant leurs centres sur l'axe et leurs plans perpendiculaires à l'axe, que l'on appelle l'*axe* de la surface. Ces cercles sont appelés les *parallèles* de la surface.

L'équation d'une surface de révolution s'obtient en exprimant qu'il y a la même relation entre la distance r d'un point à l'axe et la distance p de ce même point à un plan perpendiculaire à l'axe, qu'entre la distance d'un point de la courbe génératrice à cet axe et le plan en question.

Si, par exemple, on se donne le *méridien* de la surface, c'est-à-dire la courbe suivant laquelle un plan passant par l'axe coupe la surface au moyen de son équation

$$(1) \qquad \varphi(\xi, \eta) = 0,$$

l'axe de révolution étant pris pour axe des η, on observe que, si

$$\frac{x-x_0}{\lambda}=\frac{y-y_0}{\mu}=\frac{z-z_0}{\nu}$$

sont les équations de l'axe et (x_0, y_0, z_0) le point qui était l'origine des coordonnées pour l'équation (1) du méridien, on aura, en appelant x, y, z les coordonnées d'un point de la surface,

$$\xi=\frac{\sqrt{\Sigma[(y-y_0)\nu-(z-z_0)\mu]^2}}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

$$\eta=\frac{\lambda(x-x_0)+\mu(y-y_0)+\nu(z-z_0)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}};$$

l'équation de la surface sera donc

$$\varphi\left\{\sqrt{\frac{\Sigma[(y-y_0)\nu-(z-z_0)\mu]^2}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},\ \frac{\Sigma\lambda(x-x_0)}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}\right\}=0.$$

Je n'insiste pas sur la manière dont on peut obtenir l'équation des surfaces de révolution, ce sujet étant traité dans les ouvrages élémentaires; je ferai seulement observer que, si R est le premier membre de l'équation d'une sphère et P le premier membre de l'équation d'un plan,

$$F(P, R)=0$$

sera l'équation d'une surface de révolution; car, quand on suppose R constant, P est constant; les équations

$$R=\text{const.},\qquad P=\text{const.}$$

déterminent une série de cercles parallèles ayant leurs centres sur la droite que l'on obtient en abaissant du centre de la sphère une perpendiculaire sur $P=0$. Cette perpendiculaire, dont il est facile d'avoir l'équation, est l'axe; on en déduira facilement le méridien.

$$\varphi(z, \sqrt{x^2+y^2})=0$$

ou

$$z=\psi\left[(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

est l'équation d'une surface de révolution autour de l'axe des z, le méridien a pour équation $z = \psi(x)$.

Considérons la surface de révolution représentée par

$$z = f(x^2 + y^2),$$

on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2f'(x^2 + y^2)x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2f'(x^2 + y^2)y;$$

l'équation du plan tangent est

$$Z - z = 2f'(x^2 + y^2)[(X - x)x + (Y - y)y];$$

celles de la normale sont

$$\frac{X - x}{2xf'} = \frac{Y - y}{2yf'} = -(Z - z);$$

l'une de ces équations, celle de la projection de la normale sur le plan des xy, peut s'écrire

$$(X - x)y - (Y - y)x = 0$$

ou

$$Xy - Yx = 0.$$

La projection de la normale sur le plan des xy passe donc par l'origine; on en conclut que :

Dans toute surface de révolution, la normale rencontre l'axe; réciproquement : *si la normale à une surface rencontre constamment une droite fixe, cette surface est de révolution.*

Prenons la droite fixe pour axe des z; les équations de la normale sont

$$\frac{X - x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = -(Z - z);$$

pour exprimer que la normale rencontre l'axe des z, il suffit d'exprimer que la projection sur le plan des xy

$$(X - x)\frac{\partial z}{\partial y} - (Y - y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

passe par l'origine, ce qui donne

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial(x^2+y^2, z)}{\partial(x, y)} = 0;$$

elle exprime donc (p. 168, t. I) que z est fonction de x^2+y^2 et par suite que la surface est de révolution. C. Q. F. D.

XVII. — Conoïdes.

Un conoïde est, comme l'on sait, la surface engendrée par une droite appelée *génératrice* qui s'appuie sur une droite fixe appelée *axe*, en restant parallèle à un plan fixe appelé *directeur*.

Dans le conoïde, la distance P d'un point M au plan directeur est une fonction de l'angle que la génératrice passant en M fait avec une droite fixe parallèle au plan directeur; en appelant alors U et V les distances du point M à deux plans passant par l'axe, on a $P = \varphi\left(\frac{U}{V}\right)$. Quand on prend l'axe pour axe des z et le plan directeur pour plan des xy, cette équation devient

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right); \tag{1}$$

z étant fonction homogène et de degré 0 de x et y, on a évidemment

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Si le conoïde est *droit*, c'est-à-dire si l'axe est perpendiculaire au plan directeur, cette équation exprime que la normale est perpendiculaire au rayon vecteur projeté sur le plan des xy, comme elle l'est à la directrice; sa construction de-

vient facile. L'équation (2), lorsque z est l'ordonnée d'une surface quelconque, est l'équation de la courbe de contact d'un conoïde droit circonscrit à cette surface, dont le plan directeur serait le plan des xy. Cette équation exprime en effet que le $\frac{\partial z}{\partial x}$ et le $\frac{\partial z}{\partial y}$ de la surface sont les mêmes que ceux du conoïde qui aurait la série des points communs x, y, z avec la surface.

Si le z d'une surface satisfait identiquement à la relation (1), cette surface est un conoïde. Bien que cette proposition ne nous soit pas très utile, nous indiquerons la marche à suivre pour la démontrer. On changera de variable et à la place de y on prendra $\frac{y}{x}$; l'équation (2) deviendra alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

ce qui prouve que z considéré comme fonction de x et $\frac{y}{x}$ ne contient pas x; donc z doit pouvoir s'exprimer au moyen de $\frac{y}{x}$ seul; donc, etc.

D'ailleurs l'équation (2) exprime que z est fonction homogène et de degré 0 de x et y (voir t. I, p. 222).

XVIII. — Des surfaces enveloppes.

Considérons une surface dont l'équation renferme un paramètre variable α et, par conséquent, variable elle-même de forme et de position. Soit

$$(1) \qquad f(x, y, z, \alpha) = 0$$

son équation : pour une valeur déterminée de α, cette équation représente une surface bien déterminée; mais, α variant, on obtient une série de surfaces formant une *famille*.

Maintenant supposons qu'ayant attribué à α une valeur

déterminée, on lui fasse subir un accroissement $d\alpha$, on aura la nouvelle surface

$$(2)\qquad f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0;$$

elle coupera la première suivant une courbe qui pour $d\alpha = 0$ prendra une forme limite appelée *caractéristique*. Les équations d'une caractéristique sont (1) et (2) ou (1) et

$$(3)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Si entre (1) et (3) on élimine α, on aura le lieu des caractéristiques ou l'*enveloppe* de la surface (1). L'enveloppe peut aussi être représentée par les équations simultanées (1) et (3), à la condition d'y regarder α comme fonction de x, y, z, déduite de l'une de ces deux formules.

Considérons maintenant une caractéristique voisine de la première : ses équations seront

$$f(\alpha + d\alpha) = 0, \qquad f'(\alpha + d\alpha) = 0,$$

en posant, pour abréger, $f'(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$, ou bien

$$f(\alpha) + f'(\alpha) d\alpha = 0, \qquad f'(\alpha) + f''(\alpha) d\alpha = 0,$$

en négligeant les termes du second ordre; or la première de ces équations est une combinaison de (1) et (3); donc deux caractéristiques successives se rencontrent, quand on fait abstraction des termes du second ordre.

Théorème. — *Les surfaces de la famille* (1) *touchent l'enveloppe, tout le long d'une même caractéristique.*

En effet, $f(x, y, z, \alpha) = 0$ représentera à volonté une enveloppée ou l'enveloppe, suivant que l'on y considérera α comme une constante ou comme une fonction de x, y, z déduite de

$$f'(x, y, z, \alpha) = 0.$$

Cherchons le $\frac{\partial z}{\partial x}$ et le $\frac{\partial z}{\partial y}$ de l'enveloppe : appelons-les p et q;

à cet effet, différentions $f = 0$ par rapport à x; d'abord, en y considérant α comme fonction de x, y, z, nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dz} p\right) = 0;$$

de là on déduit p : on calculerait q d'une façon analogue. Mais $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ est nul, car c'est l'équation $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ qui sert de définition à α, en sorte que l'équation précédente se réduit à

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0,$$

résultat auquel on serait parvenu en considérant α comme constant; donc le $\frac{\partial z}{\partial x}$ et le $\frac{\partial z}{\partial y}$ de l'enveloppe et de l'enveloppée sont les mêmes tout le long d'une caractéristique; leurs plans tangents sont donc les mêmes, et par suite elles sont circonscrites l'une à l'autre.

Réciproquement : *Si une surface mobile*

(1) $$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

est sans cesse circonscrite à une autre fixe $F = 0$, *celle-ci est son enveloppe.*

En effet, toute surface fixe $F = 0$ peut être représentée par l'équation

(2) $$f(x, y, z, \varphi) = 0,$$

pourvu que φ soit déterminé par l'identité

$$f(x, y, z, \varphi) = F.$$

Résolvons les deux équations (1) et (2), l'une par rapport à α, l'autre par rapport à φ, les valeurs de α et de φ seront identiques, et l'on aura $\alpha = \varphi$; les formules (1) et (2) ne sauraient donc avoir lieu en même temps, que si l'on a $\varphi = \alpha$.

Cela posé, calculons le p de la surface (2) : pour cela différentions par rapport à x la formule (2), nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p\right) = 0;$$

le $\frac{\partial z}{\partial x}$ de la surface (1) est donné par la formule

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} p = 0.$$

Pour que les valeurs de p tirées de ces équations soient égales, il faut que

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p\right) = 0.$$

De même, pour que les valeurs de q soient égales, il faut que

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q\right) = 0;$$

or les quantités

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} p = \frac{d\varphi}{dx},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q = \frac{d\varphi}{dy}$$

ne sauraient être nulles à la fois, sans quoi l'on aurait

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = d\varphi = 0,$$

et φ serait une constante : la surface $F = 0$ se confondrait avec une des enveloppées; donc il faut que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0,$$

en chaque point où la surface $F = 0$ touche les surfaces de la famille, c'est-à-dire en chaque point de $F = 0$; donc φ est déterminé au moyen de la même équation que l'enveloppe proprement dite des surfaces de la famille considérée.

Théorème II. — *Toutes les caractéristiques sont tangentes à une même courbe réelle ou imaginaire.*

Nous avons vu que deux caractéristiques voisines se rencontraient, en négligeant des termes du deuxième ordre par rapport à $d\alpha$. Les équations de ces caractéristiques sont

$$f(\alpha)=0,\quad f'(\alpha)=0,\quad f(\alpha)+f'(\alpha)d\alpha=0,\quad f'(\alpha)+f''(\alpha)d\alpha=0;$$

elles se réduisent aux trois suivantes :

$$f(\alpha)=0,\qquad f'(\alpha)=0,\qquad f''(\alpha)=0.$$

La courbe obtenue en éliminant α, c'est-à-dire le *lieu des points de rencontre de deux caractéristiques voisines,* est ce que l'on appelle l'*arête de rebroussement* de l'enveloppe. C'est à cette *arête* que chaque caractéristique est tangente.

En effet, $f=0, f'=0$ représenteront à volonté une caractéristique ou l'arête, suivant que α sera constant ou déterminé par $f''=0$; différentions $f=0$ et $f'=0$ par rapport à z : nous aurons, en supposant α variable,

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx}x'+\frac{d\alpha}{dy}y'+\frac{d\alpha}{dz}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x}x'+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0.$$

x' et y', dérivées de x et y prises par rapport à z, auront mêmes valeurs au point commun à la caractéristique et à l'arête, car $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f'}{\partial \alpha}$, c'est-à-dire $f'(\alpha)$ et $f''(\alpha)$, sont nuls en ces points, et, pour trouver l'x' et l'y' de la caractéristique, il faudrait supposer nuls les coefficients de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f'}{\partial \alpha}$, ce qui conduit au même résultat. Les coefficients directeurs des tangentes aux points communs aux deux courbes sont donc égaux, et par suite ces courbes sont tangentes.

Théorème III. — *L'arête de rebroussement est le lieu des intersections successives de trois surfaces voisines de la famille.*

En effet, les équations de trois surfaces voisines sont

$$f(\alpha)=0, \qquad f(\alpha+h)=0, \qquad f(\alpha+k)=0$$

ou

$$f(\alpha)=0, \qquad f(\alpha)+hf'(\alpha)+\frac{h^2}{1.2}f''(\alpha)=0,$$
$$f(\alpha)+kf'(\alpha)+\frac{k^2}{1.2}f''(\alpha)=0,$$

qui, combinées entre elles, équivalent à

$$f(\alpha)=0, \qquad f'(\alpha)=0, \qquad f''(\alpha)=0.$$

Ces équations déterminent un point de l'arête de rebroussement.

Problème. — *Une famille de surfaces est donnée par les formules*

$$f(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots, \lambda)=0,$$
$$\varphi_1(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)=0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(\alpha, \ldots, \lambda)=0,$$

dans lesquelles le nombre des paramètres α, β, ... *est égal à* $n+1$; *trouver son enveloppe.*

Considérons $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ comme fonctions d'un même paramètre t qui sera, si l'on veut, l'une de ces quantités. L'enveloppe aura pour équation la résultante de

$$f=0 \quad \text{et de} \quad df=0,$$

ou de $f=0$, et de

$$(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial f}{\partial\beta}d\beta+\ldots+\frac{\partial f}{\partial\lambda}d\lambda=0;$$

$d\alpha$, $d\beta$, ..., étant d'ailleurs donnés par les équations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha}d\alpha+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\beta}d\beta+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}d\lambda=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}d\alpha+\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\beta}d\beta+\ldots+\dfrac{\partial\varphi_n}{\partial\lambda}d\lambda=0. \end{array}\right.$$

Il faut commencer par remplacer $d\alpha$, ..., $d\lambda$ par leurs valeurs déduites de (2), dans (1), ce qui fournit la résultante

$$(3)\qquad \frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda)} = 0.$$

Cette équation revient à (1) ou à $df = 0$; les formules $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ..., $\varphi_n = 0$ font connaître α, β, ..., λ en fonction de t, et il ne reste plus qu'à éliminer t entre (3) et $f = 0$, ou, ce qui revient au même, il faut éliminer α, β, γ, ..., λ entre $f = 0$, $\varphi_1 = 0$, ..., $\varphi_n = 0$ et l'équation (3).

Remarque I. — Si la famille de surfaces était donnée au moyen de n équations homogènes entre $n+1$ variables a, b, c, ..., on prouverait, comme on l'a fait à propos d'une question analogue de Géométrie plane, que l'enveloppe s'obtient en éliminant ces paramètres a, b, c, ... entre les $n+1$ déterminants fonctionnels que l'on peut former avec les premiers membres des n équations données considérées comme fonctions des $n+1$ variables a, b, c, ...

Remarque II. — Une famille de surfaces dont l'équation est de la forme

$$\varphi(x, y, z) = a$$

n'a pas d'enveloppe; aussi faut-il se garder de résoudre les équations des familles de surfaces dont on veut l'enveloppe, par rapport à leur paramètre. Nous n'insistons pas sur cette question dont l'analogue a été traitée en détail en Géométrie plane.

Nous ferons cependant remarquer encore que, si le paramètre a entre au premier degré dans une famille de surfaces, toutes ces surfaces passent par une courbe fixe, laquelle peut être considérée comme leur enveloppe; ainsi, l'équation de la famille étant

$$\varphi(x, y, z) + a\,\psi(x, y, z) = 0,$$

celle de l'enveloppe est $\psi(x, y, z) = 0$ avec $\varphi(x, y, z) = 0$, courbe par laquelle passent toutes les surfaces de la famille.

XIX. — Application aux surfaces de révolution.

Comme application des théories précédentes, cherchons l'enveloppe d'une série de sphères ayant leur centre sur l'axe des z.

Ces sphères ont pour équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + (z - \gamma)^2 = R^2,$$

où R est une fonction de γ qui caractérise l'espèce d'enveloppe à laquelle on a affaire. L'enveloppe s'obtiendra en éliminant γ entre cette équation et sa dérivée relative à γ, à savoir

$$-z + \gamma = R \frac{\partial R}{\partial \gamma}.$$

De cette équation on tire $\gamma = \varphi(z)$; en portant cette valeur dans (1), on trouve un résultat de la forme

$$x^2 + y^2 = \psi(z);$$

l'enveloppe cherchée est donc une surface de révolution autour de l'axe des z, ce qui était évident *a priori*.

On pourrait encore arriver à ce résultat en observant que l'enveloppe, étant tangente aux enveloppées, doit avoir mêmes normales que celles-ci aux points où elles sont en contact; or les normales aux enveloppées rencontrent le lieu des centres de ces enveloppées : ainsi la normale à la surface enveloppe rencontre une droite fixe; cette surface est donc de révolution.

La réciproque est évidente, et toute surface de révolution est l'enveloppe de sphères passant par les parallèles et ayant pour rayons les normales à la surface limitées à l'axe.

XX. — Surfaces des canaux.

Une surface canal est l'enveloppe des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe donnée. En appelant α, β, γ les coordonnées d'un point de

cette courbe, R le rayon de la sphère enveloppée, l'équation de la surface sera

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2,$$

à laquelle il faudra joindre

$$(2)\qquad (x-\alpha)\alpha'+(y-\beta)\beta'+(z-\gamma)\gamma' = 0,$$

α', β', γ' désignant les dérivées de α, β, γ par rapport à un paramètre t dont α, β, γ sont fonctions. Si l'on différentie (1), on a

$$(x-\alpha)(dx-\alpha' dt)+(y-\beta)(dy-\beta' dt)+(z-\gamma)(dz-\gamma' dt)=0$$

ou, en vertu de (2),

$$(3)\qquad (x-\alpha)dx+(y-\beta)dy+(z-\gamma)dz = 0.$$

Cette formule montre que la direction $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ est normale à la direction dx, dy, dz, c'est-à-dire à un déplacement effectué dans le plan tangent à la surface; la droite joignant les points x, y, z et α, β, γ est donc la normale à la surface.

Donc, *dans les surfaces des canaux, la normale rencontre la courbe fixe décrite par le centre de la sphère enveloppée.*

XXI. — Deuxième espèce d'enveloppes.

Une famille de surfaces peut dépendre de deux paramètres variables. Ainsi l'équation

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$$

représente une famille de surfaces. Les trois surfaces infiniment voisines

$$f(\alpha, \beta)=0, \qquad f(\alpha+d\alpha, \beta)=0, \qquad f(\alpha, \beta+d\beta)=0$$

se coupent en un certain point, qui, pour $d\alpha=0$, $d\beta=0$, a une position bien déterminée. En effet, l'intersection de ces

trois surfaces est la même que celle des trois suivantes :

$$f = 0, \qquad f + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \ldots = 0, \qquad f + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta + \ldots = 0$$

ou

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

en passant aux limites.

Si entre ces trois équations on élimine α, β, on aura le lieu des intersections de trois surfaces consécutives ou ce que l'on appelle l'*enveloppe* des surfaces $f = 0$.

On démontrera facilement que :

1° *Chaque enveloppée (ou surface de la famille) touche l'enveloppe, et que, réciproquement, si une surface touche toutes les surfaces d'une même famille, elle est leur enveloppe.*

2° *Les surfaces enveloppes résultant de l'élimination de α seul, ou de β seul, ont pour enveloppe l'enveloppe fixe, et deux enveloppes de familles différentes se touchent.*

3° *Si une famille de surfaces était donnée par des équations de la forme*

$$\begin{array}{l} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda) = 0, \\ \varphi_1(\alpha, \beta, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(\alpha, \beta, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda) = 0, \end{array}$$

le nombre des paramètres $\alpha, \ldots, \lambda$ étant supérieur de deux unités au nombre des relations $\varphi_1 = 0, \ldots, \varphi_n = 0$, on obtiendrait l'enveloppe en éliminant $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ entre les équations proposées et deux quelconques des suivantes :

$$\frac{\partial(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\beta, \gamma, \ldots, \lambda)} = 0, \qquad \frac{\partial(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\alpha, \gamma, \ldots, \lambda)} = 0, \qquad \ldots.$$

Il est entendu qu'on pourra faire usage dans les calculs de toutes les équations, mais en se rappelant qu'elles rentrent les unes dans les autres.

Enfin, si les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, étant au nombre

de $n+2$, entraient dans les équations proposées sous forme homogène, on éliminerait ces paramètres entre les équations de la forme

$$\frac{\partial(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\gamma, \delta, \ldots, \lambda)} = 0,$$

que l'on peut former avec les fonctions f, φ et les variables $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$; quelques-unes de ces équations, bien entendu, rentrent dans les autres.

XXII. — Des surfaces polaires réciproques.

Étant donnée une surface du second degré par une équation en coordonnées homogènes

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

le cône circonscrit ayant son sommet en ξ, η, ζ, τ la touche suivant son intersection avec la surface polaire, représentée par l'équation

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \tau \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

que l'on peut aussi écrire

$$x \frac{\partial f}{\partial \xi} + y \frac{\partial f}{\partial \eta} + z \frac{\partial f}{\partial \zeta} + t \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \tag{3}$$

et qui est dans le cas actuel un plan. Ce plan est dit le plan polaire du point (ξ, η, ζ, τ). La forme de l'équation (2) montre que, si le point (ξ, η, ζ, τ), que l'on appelle aussi le pôle du plan (2) ou (3) décrit un plan, son plan polaire (2) contient un paramètre au premier degré et passe par un point fixe, et réciproquement. De même, si le pôle décrit une droite, le plan polaire passera par une droite, et réciproquement. Ces droites sont dites polaires l'une de l'autre.

Cela posé, étant donnée une surface quelconque

$$\varphi(x, y, z, t) = 0, \tag{4}$$

cherchons par rapport à la surface (1) l'enveloppe des plans polaires de tous les points, nous obtiendrons ce que l'on appelle la *polaire réciproque* de la surface (4). Pour trouver cette polaire, il faudra chercher l'enveloppe du plan

$$x\frac{\partial f}{\partial \xi}+y\frac{\partial f}{\partial \eta}+z\frac{\partial f}{\partial \zeta}+t\frac{\partial f}{\partial \tau}=0,$$

sachant que l'on a

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau)=0. \tag{5}$$

Si nous écrivons l'équation du plan sous la forme

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\tau\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{6}$$

on voit qu'il faudra éliminer ξ, η, ζ, τ entre les équations (5), (6) et les suivantes, obtenues en égalant à zéro les déterminants des premiers membres de (5) et (6),

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}=0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}=0, \quad \ldots.$$

Plusieurs de ces équations, bien entendu, sont superflues; on peut les écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}:\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}:\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}:\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}:\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{7}$$

Ces équations comprennent l'une des équations (5), (6), car on peut écrire à leur suite le rapport

$$\left(\xi\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}+\tau\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right):\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}+\eta\frac{\partial f}{\partial y}+\zeta\frac{\partial f}{\partial z}+\tau\frac{\partial f}{\partial t}\right),$$

et l'on peut dire que la surface polaire que nous cherchons s'obtient en éliminant ξ, η, ζ, τ entre (6) et (7) ou entre (7) et (5).

Maintenant cherchons le lieu des pôles des plans tangents à la surface (4). Pour avoir le pôle d'un plan

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}t=0,$$

il suffit d'identifier son équation avec le plan polaire (3) du point ξ, η, ζ, τ; on a alors les équations suivantes pour déterminer le pôle

$$\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{C}\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{1}{D}\frac{\partial f}{\partial \tau},$$

ou, en changeant ξ, η, ζ, τ en x, y, z, t,

$$\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{B}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{C}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{D}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Le plan tangent à la surface (4) est, en appelant ξ, η, ζ, τ les coordonnées du point de contact,

$$X\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + Y\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + Z\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + T\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

et son pôle sera donné par les formules

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial t} : \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}.$$

Pour avoir le lieu cherché, il faudra éliminer les coordonnées ξ, η, ζ, τ entre ces équations et $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$; or ces équations sont identiques à (5) et (7) qui nous ont fourni la polaire réciproque de $\varphi = 0$; donc toute surface pouvant être considérée comme l'enveloppe de ses plans tangents est l'enveloppe des plans polaires des points de la polaire réciproque : *elle est donc à son tour la polaire réciproque de celle-ci.*

Si l'on égale la suite des rapports (7) à s et si l'on fait

$$\begin{aligned}\varphi = {} & A\xi^2 + A'\eta^2 + A''\zeta^2 + 2B\eta\zeta \\ & + 2B'\zeta\xi + 2B''\xi\eta + 2C\xi + 2C'\eta + 2C''\zeta + D,\end{aligned}$$

A, B, ... désignant des coefficients constants, on aura

$$A\xi + B''\eta + B'\zeta + C\tau = s\frac{\partial f}{\partial x},$$

....

En éliminant ξ, η, ζ, τ, s entre ces équations et (6), on aura

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \frac{\partial f}{\partial x} \\ B'' & A' & B & C' & \frac{\partial f}{\partial y} \\ B' & B & A'' & C'' & \frac{\partial f}{\partial z} \\ C & C' & C'' & D & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation de la polaire réciproque d'une surface du second degré. Si la surface (1) est la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

l'équation de la polaire réciproque devient

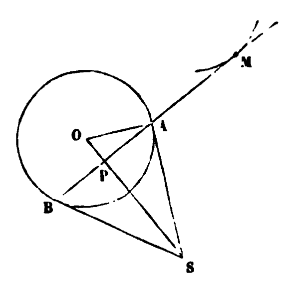
$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & x \\ B'' & A' & B & C' & y \\ B' & B & A'' & C'' & z \\ C & C' & C'' & D & t \\ x & y & z & t & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que la polaire d'une surface du second degré est du second degré. La polaire d'un plan est un point. En général, la surface polaire de $\varphi = 0$ sera d'un degré supérieur au degré de φ; mais il est facile de voir que ce degré est précisément égal à la classe de φ. En effet, à tout point d'une figure correspond un plan polaire; si donc on considère une droite rencontrant la surface $\varphi = 0$ en m points, à ces m points correspondront m plans tangents dans la surface polaire, passant par la droite polaire de la droite proposée; donc, par une droite on peut mener autant de plans tangents à une surface qu'il y a d'unités dans le degré de sa polaire réciproque. C. Q. F. D.

Quand la surface $f = 0$ se réduit à une sphère réelle, il existe un moyen géométrique fort simple de construire la

polaire réciproque d'une surface donnée. Soit M le point de contact de la surface φ et de son plan tangent MAB dont nous représentons seulement la trace sur un grand cercle de la sphère; soient S le sommet du cône circonscrit suivant le

Fig. 35.



cercle AB de la sphère, et OS la droite qui joint le centre de la sphère au sommet du cône, pôle du plan MAB; S sera un point de la polaire réciproque de $\varphi = 0$.

Soit P le point où OS rencontre le point ABM; on aura

$$OP \times OS = R^2,$$

R désignant le rayon de la sphère. Donc :

Pour avoir le point S *de la polaire réciproque de* $\varphi = 0$ *correspondant au point* M *de* $\varphi = 0$, *menez le plan tangent en* M *à* $\varphi = 0$ *et du centre de la sphère abaissez une perpendiculaire* OP *sur le plan tangent, prolongez cette perpendiculaire d'une longueur* OS, *telle qu'on ait*

$$OP \times OS = R^2.$$

Le lieu du point P est ce que l'on appelle la surface podaire de $\varphi = 0$ par rapport au point O. Donc :

La polaire réciproque d'une surface $\varphi = 0$, *par rapport à une sphère de rayon* R, *est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette surface par*

rapport au centre de la sphère, et le module de la transformation est le carré du rayon de la sphère (p. 245).

XXIII. — Digression sur les surfaces apsidales.

Considérons une surface S. Par un point fixe O, faisons passer un plan P; il coupera S suivant une certaine courbe C. Soient OM une normale à cette courbe menée par le point O, M le pied de cette normale. Par le point O, menons une perpendiculaire au plan P et, sur cette perpendiculaire, prenons OM' = OM. Le lieu du point M', quand on fait varier le plan P, est l'*apsidale* de la surface S, relative au point O.

Soient x, y, z les coordonnées du point M; x', y', z' les cordonnées du point M', par rapport à trois axes rectangulaires passant en O. Soient dx, dy, dz les composantes d'un déplacement infiniment petit effectué à partir du point M sur la courbe C; δx, δy, δz les composantes d'un déplacement infiniment petit effectué à partir du point M sur la surface S, mais perpendiculairement à dx, dy, dz. On aura

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$(2) \qquad x'\,dx + y'\,dy + z'\,dz = 0,$$

$$(3) \qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$(4) \qquad xx' + yy' + zz' = 0,$$

$$(5) \qquad \delta x\,dx + \delta y\,dy + \delta z\,dz = 0.$$

La première de ces équations exprime que OM = OM'; la seconde exprime que OM' est perpendiculaire à la direction dx, dy, dz qui est située dans le plan P; (3) exprime que OM est normale à la courbe C; (4) exprime que OM' est normale à OM, qui passe par son pied dans le plan P; enfin (5) exprime que les directions dx, dy, dz et δx, δy, δz sont perpendiculaires. Quand le point M décrit le chemin dx, dy, dz, nous supposerons que le point M' décrit le chemin dx', dy', dz';

quand le point M décrit le chemin δx, δy, δz, nous supposerons que le point M' décrit le chemin $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$.

Les formules (1) et (4) donnent, en les différentiant,

$$(6)\qquad x\,dx + y\,dy + z\,dz = x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz',$$

$$(7)\qquad x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z = x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z',$$

$$(8)\qquad x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' = -x'\,dx - y'\,dy - z'\,dz,$$

$$(9)\qquad x\,\delta x' + y\,\delta y' + z\,\delta z' = -x'\,\delta x - y'\,\delta y - z'\,\delta z;$$

en comparant (2) et (8), on a

$$(10)\qquad x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' = 0.$$

La symétrie des formules (1), (2), (3), (4) et (10) montre que la surface S peut se déduire de S' comme S' s'est déduite de S; donc :

Si S' *est l'apsidale de* S *par rapport au point* O, S *sera aussi l'apsidale de* S' *par rapport au même point.*

Les formules (2) et (3) donnent

$$\frac{dx}{yz' - zy'} = \frac{dy}{zx' - xz'} = \frac{dz}{xy' - yx'};$$

(2) et (10) donnent de même

$$\frac{dx'}{yz' - zy'} = \frac{dy'}{zx' - xz'} = \frac{dz'}{xy' - yx'}$$

et, par conséquent,

$$(11)\qquad dx : dx' = dy : dy' = dz : dz'.$$

Les directions dx, dy, dz *et* dx', dy', dz' *sont donc parallèles*, et, par suite, on a, en vertu de (2), (3), (5),

$$\begin{aligned} x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz' &= 0,\\ x\,dx' + y\,dy' + z\,dz' &= 0,\\ \delta x\,dx' + \delta y\,dy' + \delta z\,dz' &= 0; \end{aligned}$$

mais on a l'identité

$$\sum dx\,\delta x \sum dx'\,\delta x' - \sum dx'\,dx \sum \delta x'\,\delta x$$
$$= \sum (dy\,dz' - dy'\,dz)(\delta y\,\delta z' - \delta z\,\delta y').$$

Or $\sum dx\,\delta x$ est nul, en vertu de (5), et $dy\,dz' - dz\,dy'$ est nul aussi, en vertu de (11); donc il reste

$$\sum dx\,dx' \sum \delta x\,\delta x' = 0,$$

et, comme $\sum dx\,dx'$, en vertu de (11), n'est pas nul, on a

$$\delta x\,\delta x' + \delta y\,\delta y' + \delta z\,\delta z' = 0.$$

La direction δx, δy, δz est donc perpendiculaire à $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$.

On a aussi l'identité

$$\sum dx\,dx' \sum \delta x\,\delta x' - \sum dx\,\delta x \sum dx'\,\delta x'$$
$$= \sum (dy\,\delta z - dz\,\delta y)(dy'\,\delta z' - dz'\,\delta y');$$

mais le premier membre de cette identité est nul, comme on vient de le voir; le second l'est donc aussi; donc les directions $dy\,\delta z - dz\,\delta y$, ..., et $dy'\,\delta z' - dz'\,\delta y'$, ... sont rectangulaires, ce qui montre que :

Les plans tangents en deux points correspondants de deux surfaces apsidales sont rectangulaires.

En s'appuyant sur ce théorème et sur le dernier théorème du paragraphe précédent, on voit facilement que :

La polaire réciproque de l'apsidale de la surface S, *par rapport à une sphère ayant son centre en* O, *est l'apsidale de la polaire réciproque de cette surface.*

L'apsidale d'un plan est un cylindre de révolution.

L'apsidale d'une surface de révolution est de révolution.

L'apsidale d'une sphère est un tore.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ces théorèmes (CATALAN, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1869).

Nous allons chercher l'apsidale de l'ellipsoïde par rapport à son centre ; cette surface, très importante en Optique, porte le nom de *surface des ondes*.

XXIV. — Surfaces des ondes lumineuses.

Considérons l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Coupons-le par un plan central

$$(2) \qquad lx+my+nz=0,$$

$$(3) \qquad l^2+m^2+n^2=1;$$

soit ρ l'un des axes de l'ellipse déterminée par la section (2); l'enveloppe du plan parallèle à cette section située à la distance $\frac{k^2}{\rho}$ de cette section est ce que l'on appelle la *surface des ondes* (k désigne une constante).

Cherchons l'équation de cette surface : l'équation qui donne ρ est (p.360, t. I)

$$\frac{l^2}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{m^2}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{\rho^2}}+\frac{n^2}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\rho^2}}=0.$$

La question est alors ramenée à la suivante : Trouver l'enveloppe du plan

$$(4) \qquad lx+my+nz-k^2v=0,$$

sachant que

$$(5) \qquad l^2+m^2+n^2=1,$$

$$(6) \qquad \sum\frac{l^2}{\alpha^2-v^2}=0,$$

en posant, pour abréger, $\frac{1}{a}=\alpha$, $\frac{1}{b}=\beta$, $\frac{1}{c}=\gamma$, $\frac{1}{\rho}=\nu$. Pour trouver cette enveloppe, il faudra éliminer l, m, n, ν entre ces équations (4), (5), (6) et les suivantes, obtenues en égalant à zéro les déterminants fonctionnels des premiers membres de ces équations, à savoir

$$(7)\quad (mz-ny)\nu\sum\frac{l^2}{(\alpha^2-\nu^2)^2}=mnk^2\left(\frac{1}{\beta^2-\nu^2}-\frac{1}{\gamma^2-\nu^2}\right),$$

$$(8)\quad (nx-lz)\nu\sum\frac{l^2}{(\alpha^2-\nu^2)^2}=nlk^2\left(\frac{1}{\gamma^2-\nu^2}-\frac{1}{\alpha^2-\nu^2}\right),$$

$$(9)\quad (ly-mx)\nu\sum\frac{l^2}{(\alpha^2-\nu^2)^2}=lmk^2\left(\frac{1}{\alpha^2-\nu^2}-\frac{1}{\beta^2-\nu^2}\right).$$

Si l'on élève ces équations au carré et si on les ajoute en posant $R^2=x^2+y^2+z^2$, on trouve

$$(10)\qquad \sum\frac{l^2}{(\alpha^2-\nu^2)^2}=\frac{k^4}{\nu^2(R^2-k^4\nu^2)}.$$

En multipliant (8) par $-\frac{n}{lk^2}$ et (9) par $\frac{m}{lk^2}$ et en ajoutant ces équations avec (6), on a

$$\nu\,\frac{lk^2\nu-x}{lk^2}\sum\frac{l^2}{(\alpha^2-\nu^2)^2}=\frac{1}{\alpha^2-\nu^2};$$

d'où l'on tire, en vertu de (10),

$$(11)\qquad \frac{(lk^2\nu-x)k^2}{l\nu(R^2-k^4\nu^2)}=\frac{1}{\alpha^2-\nu^2};$$

et, par suite,

$$\frac{l\nu}{\alpha^2-\nu^2}=\frac{k^2x}{k^4\alpha^2-R^2}.$$

Multipliant cette équation par x et ajoutant avec ses analogues, on trouve

$$(12)\qquad \nu\sum\frac{lx}{\alpha^2-\nu^2}=\sum\frac{k^2x^2}{k^4\alpha^2-R^2};$$

d'un autre côté, de (11) on tire, en multipliant par $l\nu x$ et en ajoutant cette équation avec ses analogues,

$$\nu \sum \frac{lx}{\alpha^2 - \nu^2} = -k^2;$$

(12) devient alors

$$\frac{x^2}{R^2 - k^4\alpha^2} + \frac{y^2}{R^2 - k^4\beta^2} + \frac{z^2}{R^2 - k^4\gamma^2} = 1.$$

En posant

$$k^4\alpha^2 = \frac{k^4}{a^2} = A^2, \qquad k^4\beta^2 = B^2, \qquad k^4\gamma^2 = C^2,$$

cette équation devient

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2-A^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2-B^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2-C^2} = 1$$

ou bien

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2) \\ &\quad - [A^2(B^2+C^2)x^2 + B^2(A^2+C^2)y^2 \\ &\qquad + C^2(A^2+B^2)z^2] + A^2B^2C^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette surface possède seize points singuliers dont quatre sont réels et ont pour coordonnées ($A > B > C$)

$$y = 0, \qquad x = \pm C\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 - C^2}}, \qquad z = \pm A\sqrt{\frac{B^2 - C^2}{A^2 - C^2}};$$

les points imaginaires ont des coordonnées qui se déduisent de celles-ci par des permutations tournantes; enfin quatre autres points situés sur le plan de l'infini appartiennent à la fois à un cercle et à une ellipse.

XXV. — Nouveau point de vue sous lequel on peut envisager la surface des ondes.

Si, par le centre de l'ellipsoïde considéré au paragraphe précédent, on mène une section plane, puis que l'on élève par le centre de l'ellipsoïde une perpendiculaire à

cette section égale à l'un des axes de la section, le lieu des extrémités de la droite ainsi menée sera la surface des ondes.

En effet, en conservant les notations du paragraphe précédent, les coordonnées d'un point de la surface seront données par les équations

$$(1) \qquad x = l\rho, \qquad y = m\rho, \qquad z = n\rho;$$

pour avoir l'équation du lieu, il faut éliminer l, m, n, ρ entre ces équations, l'équation aux axes de la section, à savoir

$$(2) \qquad \frac{l^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\rho^2}} + \frac{m^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\rho^2}} + \frac{n^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{\rho^2}} = 0,$$

et l'équation

$$(3) \qquad l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Or on tire de (1) et (3)

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \qquad l^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2};$$

en portant ces valeurs dans (2), on a

$$\frac{x^2}{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} - 1} + \frac{y^2}{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{b^2} - 1} + \frac{z^2}{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{c^2} - 1} = 0,$$

et, en chassant les dénominateurs, puis en supprimant le facteur commun $x^2 + y^2 + z^2$,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) \\ \quad - [a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(a^2 + c^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2] \\ \quad + a^2 b^2 c^2 = 0. \end{array} \right.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (13) du paragraphe précédent que parce que A, B, C y sont remplacés par a, b, c. Si l'on voulait que la surface (4) fût identique à la surface (13) du paragraphe précédent, il faudrait la faire dériver d'un ellipsoïde ayant pour demi-axes non plus a, b, c, mais $\frac{k^2}{a}$, $\frac{k^2}{b}$, $\frac{k^2}{c}$.

Il est facile de voir que les deux surfaces de l'onde ainsi obtenues sont polaires réciproques l'une de l'autre par rapport à une sphère concentrique et de rayon k. En effet, la première surface des ondes est l'enveloppe d'un plan P situé à la distance $\delta = \frac{k^2}{\rho}$ du centre de l'ellipsoïde (1) du paragraphe précédent que j'appellerai E; la seconde surface a ses points sur la droite le long de laquelle on compte la distance $\delta' = \rho$ du centre de l'ellipsoïde E. On a donc $\delta\delta' = k^2$; cette relation détermine précisément les points de la polaire réciproque de la première surface par rapport à la sphère de rayon un.

Donc la surface des ondes qui est du quatrième degré est aussi de la quatrième classe et il est facile d'obtenir sa polaire réciproque.

Un mot encore sur la surface des ondes : si l'on fait

$$(5) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \lambda,$$

$$(6) \qquad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = \mu,$$

$$a^2(b^2+c^2)x^2 + b^2(c^2+a^2)y^2 + c^2(a^2+b^2)z^2 = \lambda\mu + a^2b^2c^2,$$

l'équation (4) est satisfaite; on peut donc exprimer les coordonnées d'un point quelconque de la surface des ondes au moyen de λ et μ. En résolvant les équations précédentes et en posant

$$\Delta = \sum b^2c^2(b^2 - c^2),$$

on trouve

$$x = \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{\Delta}}(\lambda - a^2)^{\frac{1}{2}}(\mu - b^2c^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\Delta}}(\lambda - b^2)^{\frac{1}{2}}(\mu - a^2c^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$z = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{\Delta}}(\lambda - c^2)^{\frac{1}{2}}(\mu - b^2a^2)^{\frac{1}{2}};$$

on peut constater que $\sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0$, ce qui prouve que les

courbes d'intersection de la surface des ondes avec les surfaces (5) et (6), où λ et μ sont constants, se rencontrent à angle droit.

XXVI. — Surface apsidale de l'ellipsoïde.

L'analyse du paragraphe précédent montre que la surface des ondes est une apsidale d'ellipsoïde relative à son centre.

Cherchons directement la surface apsidale de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

par rapport à son centre; entre les coordonnées x, y, z d'un point de l'ellipsoïde et les coordonnées du point correspondant x', y', z' de l'apsidale, on a alors les relations (p. 284)

$$xx'+yy'+zz'=0, \tag{2}$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=x^2+y^2+z^2 \tag{3}$$

et, en exprimant que la normale à l'ellipsoïde est dans le plan qui contient l'origine et les points x, y, z et x', y', z',

$$(yz'-zy')\frac{x}{a^2}+(zx'-xz')\frac{y}{b^2}+(xy'-yx')\frac{z}{c^2}=1.$$

Cette équation peut s'écrire

$$x'yz\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+y'zx\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z'xy\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=1. \tag{4}$$

Si entre (1), (2), (3), (4) on élimine x, y, z, on aura l'équation de l'apsidale. Si l'on fait

$$r^2=x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2,$$

(2) et (4) donneront

$$\frac{a^2x'}{x(r^2-a^2)}=\frac{b^2y'}{y(r^2-b^2)}=\frac{c^2z'}{z(r^2-c^2)}$$
$$=\left(\frac{a^2x'^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y'^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z'^2}{r^2-c^2}\right):(xx'+yy'+zz');$$

donc, en vertu de (2), on a

$$\frac{a^2x'^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y'^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z'^2}{r^2-c^2}=0:$$

c'est l'équation de l'apsidale cherchée et l'on reconnaît une surface des ondes.

XXVII. — Sur les enveloppes des courbes gauches.

Deux équations de la forme

$$\varphi(x, y, z, a)=0, \qquad \psi(x, y, z, a)=0$$

représentent ce que l'on appelle une *famille* de courbes dans l'espace. Chaque valeur de a fournit une courbe particulière; mais, en général, une courbe quelconque,

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z, a)=0, \qquad \psi(x, y, z, a)=0,$$

ne coupera pas la courbe infiniment voisine

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z, a+\Delta a)=0, \qquad \psi(x, y, z, a+\Delta a)=0,$$

de sorte qu'il n'existera plus, comme en Géométrie plane, de *lieu d'intersections successives*.

Quoi qu'il en soit, si, en bornant les approximations au premier ordre, c'est-à-dire en remplaçant les équations (2) par

$$(3) \qquad \varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial a}\,da=0, \qquad \psi+\frac{\partial\psi}{\partial a}\,da=0,$$

les courbes (1) et (3) se coupent, le lieu de leurs intersections portera le nom d'*enveloppe*. Pour qu'il y ait, à cet ordre d'approximation près, intersection, il faut que les formules (1) et (3) soient compatibles ou, ce qui revient au même, que les suivantes le soient

$$(4) \qquad \varphi=0, \qquad \psi=0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial a}=0;$$

en éliminant x, y, z entre ces équations, on devra donc avoir une équation identique (quel que soit a).

Supposons cette condition remplie; l'élimination de a entre les trois équations auxquelles se réduit le système (4) fournira ce que l'on appelle l'*enveloppe* des courbes considérées.

L'enveloppe est tangente à toutes les courbes de la famille : en effet, les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ peuvent être censées représenter l'enveloppe, si l'on y considère a comme tiré de l'une des équations équivalentes $\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial\psi}{\partial a} = 0$; et il est facile de voir que $\frac{dy}{dz}$ et $\frac{dx}{dz}$ ont les mêmes valeurs, que a soit constant ou donné par les formules $\frac{\partial\varphi}{\partial a} = 0$ ou $\frac{\partial\psi}{\partial a} = 0$.

Réciproquement, si les courbes (1) sont tangentes à une même courbe, cette courbe peut être considérée comme leur enveloppe. En effet, soit

$$F(x, y, z,) = 0$$

le lieu des courbes données, la courbe tangente doit les rencontrer toutes, et le lieu des points de contact est sur $F = 0$; on peut donc le représenter par $F = 0$ et par une équation telle que

$$\theta(x, y, z, a) = 0,$$

appartenant aussi aux courbes de la famille; seulement, pour la courbe tangente, a sera une fonction convenablement choisie de x, y, z. Or, pour que les dx, dy, dz soient les mêmes, que a soit variable ou constant, il faut que $\frac{\partial\theta}{\partial a} = 0$; la valeur de a fournie par cette équation est celle qui convient à l'enveloppe. Comme application, cherchons la condition pour que la droite

$$(1) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q$$

touche une courbe. Il faut que les équations

$$0 = z\,da + dp, \qquad 0 = z\,db + dq$$

soient compatibles avec les proposées, ou que

$$da\,dq - db\,dp = 0.$$

On pourrait trouver cette condition en identifiant les équations (1) avec les suivantes

$$\frac{x - x'}{dx'} = \frac{y - y'}{dy'} = \frac{z - z'}{dz'}$$

ou

$$x = x' + (z - z')\frac{dx'}{dz'}, \qquad \ldots,$$

qui sont celles d'une tangente à une courbe au point (x', y', z'); alorson aurait

$$a = \frac{dx'}{dz'}, \qquad b = \frac{dy'}{dz'}, \qquad p = x' - z'\frac{dx'}{dz'}, \qquad q = y' - z'\frac{dy'}{dz'},$$

ou, en éliminant dx', dy', dz',

$$p = x' - a z', \qquad q = y' - b z',$$

$$dp = dx' - a\,dz' - z'\,da, \qquad dq = dy' - b\,dz' - z'\,db.$$

Donc

$$\begin{aligned} dp\,db - dq\,da &= dx'\,db - dy'\,da - (a\,db - b\,da)dz' \\ &= dz'(a\,db - b\,da) - (a\,db - b\,da)dz', \end{aligned}$$

ou enfin

$$dp\,db - dq\,da = 0.$$

Une méthode analogue permettrait d'exprimer qu'une courbe mobile touche sans cesse une courbe fixe.

XXVIII. — Remarque sur les enveloppes de courbes.

Si l'on considère la surface représentée par l'équation

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

et les surfaces représentées par les deux équations

$$(2) \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0,$$

chacune des surfaces (2) coupera (1) suivant une courbe, et ces deux courbes tracées sur la surface (1) se rencontrent aux points réels ou imaginaires dont les coordonnées sont les solutions communes à (1) et (2). Si, pour fixer les idées, on suppose les équations (1) et (2) algébriques, on sera tenté de dire que deux courbes algébriques tracées sur une même surface se rencontrent *toujours* en un nombre fini de points; et qu'en général deux courbes quelconques tracées sur une même surface se rencontrent, pourvu que leurs équations ne présentent pas quelque singularité introduite pour ainsi dire tout exprès pour faire tomber notre conclusion en défaut.

S'il en était ainsi du reste, comme deux courbes quelconques peuvent toujours être censées appartenir à une même surface, il en résulterait que deux courbes quelconques se coupent ordinairement, et, pour parler avec plus de précision, que deux courbes algébriques se coupent toujours, ce que l'on sait être faux.

Il y a là un paradoxe qu'il faut chercher à expliquer; et d'abord, il est incontestable que les courbes algébriques représentées par les équations (1) et (2) se coupent au sens analytique du mot et que si les équations en question sont du degré m, n, p, le nombre des intersections sera mnp.

Prenons maintenant deux courbes algébriques quelconques représentées par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} \theta\,(x, y, z) = 0, \\ \theta_1(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

et

$$(4)\qquad \begin{cases} \varpi\,(x, y, z) = 0, \\ \varpi_1(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Il y a toujours, avons-nous dit, une surface contenant ces deux courbes, par exemple la surface représentée par l'équation

$$(5)\qquad \theta\varpi + \theta_1\varpi_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad F = 0,$$

et il est clair qu'il y en aurait une infinité d'autres. Le rai-

sonnement en vertu duquel on conclurait que les courbes (3) et (4) se rencontrent consisterait à admettre que l'équation $F=0$ peut remplacer l'une des équations (3) ou (4) et que nos courbes peuvent être représentées par les équations

$$F=0, \qquad \theta=0 \tag{6}$$

et

$$F=0, \qquad \varpi=0. \tag{7}$$

Les courbes représentées par les équations (6) et (7) se rencontrent bien effectivement (au sens analytique du mot); mais elles ne sont pas identiques aux courbes représentées par les équations (3) et (4): cette digression, peut-être un peu naïve, était, je crois, nécessaire à l'intelligence de ce qui va suivre.

Nous avons vu que, pour trouver l'enveloppe de courbes représentées par

$$\varphi(x, y, z, a)=0, \qquad \psi(x, y, z, a)=0, \tag{8}$$

il fallait poser

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial a}=0; \tag{9}$$

en supposant ces équations compatibles, l'élimination de a fournit l'enveloppe. Pour faire le calcul, on pourrait être tenté d'éliminer a entre les équations (8), ce qui donnerait la résultante

$$F(x, y, z)=0 \tag{10}$$

et de remplacer le système (8) par le système

$$\varphi=0, \qquad F=0; \tag{11}$$

alors l'enveloppe serait représentée par la résultante de (11) et de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}=0,$$

et elle existerait toujours, puisque $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ est une identité.

Effectivement, la courbe représentée par les équations (11) a une enveloppe, mais elle n'est pas identique à la courbe représentée par les équations (8). La courbe (8) et la courbe voisine

$$\varphi(x, y, z, a + \Delta a) = 0, \qquad \psi(x, y, z, a + \Delta a) = 0$$

sont bien sur la même surface $F = 0$, mais elles ne se rencontrent pas pour cela, parce qu'elles ne sont pas identiques aux courbes représentées par

$$\varphi(x, y, z, a) = 0, \qquad F = 0$$

et

$$\varphi(x, y, z, a + \Delta a) = 0, \qquad F = 0.$$

Il va sans dire que, pour trouver l'enveloppe d'une famille de courbes, il ne faudrait pas non plus résoudre leurs équations par rapport au paramètre qu'elles contiennent.

En général, il faudra éviter de faire subir aux équations des courbes enveloppées une transformation pouvant modifier la nature de ces courbes.

XXIX. — Des surfaces développables.

Les surfaces enveloppes d'un plan mobile portent le nom de *surfaces développables* pour une raison que nous exposerons plus loin; de toutes les surfaces enveloppes ce sont les plus remarquables. La théorie générale des enveloppes prouve que :

1° *Les surfaces développables sont réglées, c'est-à-dire sont engendrées par le mouvement d'une droite* (génératrice).

Cette génératrice est la *caractéristique* du plan mobile.

2° *Le plan tangent touche la surface tout le long d'une génératrice ou caractéristique, et par conséquent il n'y a*

qu'un seul et même plan tangent pour tous les points d'une même génératrice.

3° *Les génératrices touchent toutes une même courbe appelée arête de rebroussement.*

Les génératrices d'une surface développable se rencontrent, au moins quand on se borne à considérer les termes du premier ordre, mais ceci a besoin d'être éclairci par quelques développements.

La plus courte distance de deux génératrices voisines, tangentes à l'arête de rebroussement, est moindre que la distance du point de contact de l'une à la seconde; or cette distance est du second ordre; donc la plus courte distance de deux génératrices est du second ordre, au moins, par rapport à l'arc de l'arête de rebroussement ou par rapport au paramètre qui entre dans l'équation d'une génératrice. Nous allons prouver que cette distance est du troisième ordre. Cela résulte du théorème suivant :

Théorème de Bouquet. — *Si la plus courte distance de deux droites contenant dans leurs équations un paramètre variable est d'ordre supérieur au premier, elle est au moins du troisième.*

Pour démontrer cette proposition, considérons une droite mobile

$$x = az + p, \qquad y = bz + q \tag{1}$$

contenant dans son équation un seul paramètre variable.

Soit

$$x = (a + \Delta a)z + p + \Delta p, \qquad y = (b + \Delta b)z + q + \Delta q \tag{2}$$

l'équation d'une droite infiniment voisine; la plus courte distance h des droites (1) et (2) est donnée par la formule

$$h = \frac{\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}. \tag{3}$$

Or, aux termes du troisième ordre près, on a

$$\Delta a = da + \tfrac{1}{2} d^2 a + \ldots,$$
$$\Delta b = db + \tfrac{1}{2} d^2 b + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La formule (3) donne alors, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$h = \frac{(da\,dq - db\,dp) + \frac{1}{2}(d^2a\,dq + da\,d^2q - d^2b\,dp - db\,d^2p)}{\sqrt{da^2 + db^2 + (a\,db - b\,da)^2}}.$$

Si h est d'ordre supérieur au premier, $da\,dq - db\,dp$ est nul; or le second groupe écrit entre parenthèses au numérateur de h est la différentielle du premier $da\,dq - db\,dp$: il est donc nul en même temps que le premier, et h est d'ordre supérieur au second.

Dans les cônes, qui sont les enveloppes d'un plan mobile passant par un point fixe, les génératrices se rencontrent rigoureusement au sommet qui est l'arête de rebroussement de la surface; dans les cylindres, cette arête est à l'infini.

Réciproquement, si la plus courte distance de deux génératrices d'une surface réglée est d'ordre supérieur au premier, ces génératrices seront tangentes à une même courbe; en effet, on pourra identifier les équations (1) avec celles d'une tangente à une courbe

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \qquad Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

car l'identification donne

$$a = \frac{dx}{dz}, \qquad p = x - z\frac{dx}{dz},$$
$$b = \frac{dy}{dz}, \qquad q = y - z\frac{dy}{dz}.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut qu'il existe entre elles une équation de condition indépendante de $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$; éliminant $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$, on a

$$p = x - az, \qquad q = y - bz$$

ou

$$dp = dx - a\,dz - z\,da, \qquad dq = dy - b\,dz - z\,db$$

et, en observant que $dx = a\,dz$, $dy = b\,dz$,

$$dp = -z\,da, \qquad dq = -z\,db$$

et, par suite,

$$dp\,db - da\,dq = 0.$$

C'est la condition pour que la distance de deux génératrices soit d'ordre supérieur au premier.

On peut arriver autrement à ce résultat et trouver directement la condition pour que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q$$

ait une enveloppe ou pour qu'elle soit tangente à une courbe à double courbure. En effet, d'après la théorie des courbes enveloppes, il faudra que les équations

$$0 = z\,da + dp, \qquad 0 = z\,db + dq$$

soient compatibles avec les précédentes, ce qui donne encore la relation

$$dp\,db - da\,dq = 0.$$

Réciproquement, le lieu des tangentes à une courbe gauche est une surface développable. Nous verrons plus loin une démonstration analytique de ce fait; bornons-nous pour le moment à faire observer que le plan passant par une tangente parallèlement à la tangente voisine est partout à une distance du second ordre de cette génératrice et par suite touche le lieu des tangentes tout le long de l'une d'elles, et qu'il ne contient par suite qu'un seul paramètre variable.

La plus courte distance de deux génératrices d'une surface développable ne peut jamais être d'un ordre supérieur au troisième (nous entendons par là qu'elle ne peut pas rester de cet ordre); en effet, pour que cette distance fût du quatrième ordre, il faudrait que, dans l'expression

de $\Delta a\,\Delta q - \Delta b\,\Delta p$, les termes du quatrième ordre fussent nuls, ou que l'on eût, outre les relations

$$(a)\qquad da\,dq - db\,dp = 0,$$

$$(b)\qquad da\,d^2q + d^2a\,dq - db\,d^2p - d^2b\,dp = 0,$$

la suivante :

$$(c)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{6}(da\,d^3q - db\,d^3p) \\ \quad + \frac{1}{4}(d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p) + \frac{1}{6}(dq\,d^3a - dp\,d^3b) = 0. \end{array} \right.$$

Or, en différentiant (b), on a

$$da\,d^3q + d^3a\,dq - db\,d^3p - d^3b\,dp + 2d^2a\,d^2q - 2d^2b\,d^2p = 0;$$

en vertu de cette relation, (c) devient

$$(d)\qquad d^2a\,d^2q - d^2b\,d^2p = 0;$$

or, en différentiant les équations

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

on a

$$dx = a\,dz + z\,da + dp, \qquad dy = b\,dz + z\,db + dq;$$

mais $dx = a\,dz$, $dy = b\,dz$, car la droite mobile est tangente au lieu des points x, y, z; il en résulte

$$z\,da + dp = 0, \qquad z\,db + dq = 0$$

et, en différentiant,

$$z\,d^2a + da\,dz + d^2p = 0, \qquad z\,d^2b + db\,dz + d^2q = 0.$$

En éliminant z, il vient

$$(da\,d^2b - db\,d^2a)dz + d^2p\,d^2b - d^2q\,d^2a = 0.$$

En général, dz n'est pas nul (s'il l'était, z serait constant et le lieu des points x, y, z serait alors une courbe plane); si l'on a alors égard à la formule (d), on a

$$(e)\qquad da\,d^2b - db\,d^2a = 0$$

ou bien

$$\frac{d^2 a}{da} = \frac{d^2 b}{db}$$

ou

$$d \log da = d \log db.$$

On en conclut, en appelant k une constante,

$$da = k\, db$$

et, par suite,

$$a = kb + k',$$

k' désignant une nouvelle constante; or $a = \frac{dx}{dz}$, $b = \frac{dy}{dz}$, donc

$$dx = k\, dy + k'\, dz;$$

on en conclut, en appelant k'' une nouvelle constante,

$$x = ky + k'z + k'',$$

ce qui prouve que la courbe lieu des points x, y, z est plane, et par suite la distance de deux tangentes est rigoureusement nulle; cette distance ne peut donc être qu'accidentellement d'ordre supérieur au troisième.

XXX. — Équation différentielle des surfaces développables.

Une surface développable peut être représentée par l'équation d'une enveloppée (plan quelconque dont les coefficients p, q, θ sont fonctions d'un même paramètre α)

$$(1) \qquad z = px + qy + \theta,$$

et par sa dérivée prise par rapport à α

$$(2) \qquad 0 = p'x + q'y + \theta'.$$

Les formules (1) et (2) représentent une génératrice rectiligne (caractéristique) ou la surface, à volonté, suivant que α est constant ou variable. L'arête de rebroussement est fournie par (1) et (2) et la dérivée de (2)

$$(3) \qquad 0 = p''x + q''y + \theta''.$$

On remarque d'abord que, p, q et θ étant fonctions d'un même paramètre, q est fonction de p; soit

$$(4)\qquad q = \varphi(p).$$

On a d'ailleurs

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

car (1) est l'équation d'un plan tangent. On peut le constater en différentiant (1) par rapport à x, en y regardant α comme fonction de x et y déduite de (2); on a alors

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p + (p'x + q'y + \theta')\frac{d\alpha}{dx}$$

ou, en vertu de (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p.$$

Le caractère fondamental des surfaces développables, ce qui en fait précisément des surfaces exceptionnelles, c'est que le plan tangent renferme un seul paramètre variable et que ce plan ne peut être assujetti qu'à une seule condition, telle que de passer par un point. Dans la sphère qui n'est pas développable, le plan tangent peut être assujetti à *deux* conditions : ainsi l'on peut mener à cette surface un plan tangent passant par deux points donnés.

On peut d'ailleurs prouver que, s'il existe entre p et q une relation

$$q = \varphi(p),$$

la surface représentée par cette équation *différentielle* est développable. En effet, le plan tangent à la surface en x, y, z est

$$(X - x)p + (Y - y)q = Z - z$$

ou

$$Z = pX + qY + \theta,$$

en posant, pour abréger,

$$\theta = z - px - qy.$$

Il est facile de prouver que θ est une fonction de p seul; en effet, en observant que dz est égal à $p\,dx + q\,dy$, on a

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -x\frac{\partial p}{\partial x} - y\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = -x\frac{\partial p}{\partial y} - y\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Si l'on forme le déterminant $\frac{\partial(\theta, p)}{\partial(x, y)}$, on trouve

$$-y\left(\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

ou

$$-y\frac{\partial(q, p)}{\partial(x, y)},$$

c'est-à-dire zéro, puisque, q étant fonction de p, $\frac{\partial(q, p)}{\partial(x, y)}$ doit être nul. Ainsi donc, si la relation $q = \varphi(p)$ est satisfaite, le plan tangent ne contiendra qu'un seul paramètre variable dans son équation. La surface en question est donc l'enveloppe d'un plan qui ne contient qu'un seul paramètre variable; par suite elle est développable. Ainsi, en résumé :

Pour que le plan tangent à une surface renferme deux paramètres variables ou pour que la condition d'être tangent à une surface soit simple pour un plan, il faut et il suffit que la surface ne soit pas développable, ou qu'il n'existe pas de relation entre p et q.

La relation $q = \varphi(p)$ est parfois remplacée par une autre plus facile à vérifier. Voici comment on l'obtient :

Quand deux fonctions p et q de x et de y sont fonctions l'une de l'autre, leur déterminant fonctionnel est nul; et, réciproquement, si leur déterminant est nul, p et q sont liés par une relation telle que $q = \varphi(p)$; posons

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

$$t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Le déterminant de p et q sera

$$\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2$$

et, par suite, les deux relations

$$q = \varphi(p),$$

où φ est indéterminé, et

$$rt - s^2 = 0 \tag{5}$$

seront équivalentes; cette relation (5) appartient donc exclusivement aux surfaces développables.

THÉORÈME. — *Le lieu des tangentes à une courbe à double courbure est une surface développable.*

Soient, en effet, α, β, γ les coordonnées d'un point d'une courbe à double courbure; si l'on désigne les dérivées prises par rapport à γ au moyen d'accents, les équations de la tangente à la courbe considérée au point (α, β, γ) seront

$$\left\{\begin{aligned} x - \alpha &= \alpha'(z - \gamma), \\ y - \beta &= \beta'(z - \gamma). \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Si l'on suppose α et β exprimés en fonction de γ au moyen des équations de la courbe, l'élimination de γ fera connaître l'équation du lieu des tangentes. Or ces équations (1), prises simultanément, peuvent être censées représenter le lieu des tangentes, et, en considérant γ comme une fonction de x, y, z définie par l'une d'elles, on pourra différentier ces équations par rapport à x et à y, ce qui donnera

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha' \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \alpha''(z - \gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \alpha'\left(p - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right), \\
0 &= \alpha' \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \alpha''(z - \gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \alpha'\left(q - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right), \\
0 &= \beta' \frac{\partial\gamma}{\partial x} + \beta''(z - \gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \beta'\left(p - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right), \\
1 &= \beta' \frac{\partial\gamma}{\partial y} + \beta''(z - \gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \beta'\left(q - \frac{\partial\gamma}{\partial y}\right);
\end{aligned}$$

de ces équations on tire

$$p = \frac{1}{\alpha'}\left[1 - \alpha''(z-\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right], \qquad q = \frac{\alpha''}{\alpha'}(z-\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$
$$q = \frac{1}{\beta'}\left[1 - \beta''(z-\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right], \qquad p = \frac{\beta'}{\beta''}(z-\gamma)\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Si l'on élimine $\frac{\partial\gamma}{\partial x}$ et $\frac{\partial\gamma}{\partial y}$, $z-\gamma$ s'élimine en même temps, et l'on a

$$p = \frac{\beta''}{\alpha'\beta''+\beta'\alpha''}, \qquad q = \frac{\alpha''}{\alpha'\beta''+\beta'\alpha''};$$

p et q sont donc fonctions de γ seul, c'est-à-dire qu'ils sont fonctions l'un de l'autre; la relation

$$q = \varphi(p),$$

caractéristique des surfaces développables, est donc satisfaite.

Ainsi, en résumé, nous avons deux modes de génération des surfaces développables :

1° *Par enveloppe d'un plan mobile;*

2° *Par le mouvement d'une droite qui reste tangente à une courbe ou, ce qui revient au même, qui se meut de telle sorte que sa plus courte distance avec la droite voisine soit du troisième ordre.*

Il est d'ailleurs facile de constater que la plus courte distance de deux tangentes d'une courbe à double courbure est du troisième ordre, car la relation

$$da\,d\beta - db\,d\alpha = 0$$

est satisfaite en remplaçant a par α', b par β', α par $\alpha-\gamma\alpha'$ et β par $\beta-\gamma\beta'$.

Mais il faut remarquer que la distance d'un point de la courbe à la tangente menée par le point voisin n'est que du second ordre : si l'on cherche, en effet, la distance h du point $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ à la droite

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

on trouve

$$h^2 = \frac{(dz\,\Delta y - dy\,\Delta z)^2 + (dx\,\Delta z - dz\,\Delta x)^2 + (dy\,\Delta x - dx\,\Delta y)^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

en remplaçant Δx par $dx + \frac{1}{2}d^2x + \ldots$, on a

$$h^2 = \frac{(dz\,d^2y - d^2z\,dy)^2 + (dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2 + (dy\,d^2x - d^2y\,dx)^2}{4(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

h^2 est du quatrième ordre au moins; donc h est du second ordre et il est facile de voir qu'il n'est jamais d'ordre supérieur, sans quoi il faudrait que l'on eût à la fois

$$dz\,d^2y - d^2z\,dy = 0, \quad dx\,d^2z - d^2x\,dz = 0, \quad dy\,d^2x - dx\,d^2y = 0$$

ou

$$\frac{d^2x}{dx} = \frac{d^2y}{dy} = \frac{d^2z}{dz}$$

ou

$$d\log dx = d\log dy = d\log dz;$$

il en résulte que

$$\log dx + \log a = \log dy + \log b = \log dz + \log c,$$

a, b, c désignant des constantes arbitraires dont le nombre se réduit à deux distinctes. On en conclut

$$a\,dx = b\,dy = c\,dz$$

ou

$$ax + a' = by + b' = cz + c'.$$

a', b', c' désignant de nouvelles constantes. Ces équations sont celles d'une droite et, par suite, la distance d'un point d'une courbe proprement dite à la tangente voisine est du second ordre. Accidentellement, cette distance pourra être du troisième ordre, mais cette circonstance ne saurait se présenter tout le long de la courbe.

XXXI. — Surfaces touchées par un plan suivant une ligne.

Nous avons vu que le plan tangent à une développable la touchait tout le long d'une génératrice rectiligne; on peut prouver que réciproquement :

Si une surface est toujours touchée par son plan tangent suivant une ligne : 1° *cette ligne est droite;* 2° *la surface est développable.*

En effet, si le plan tangent touche la surface suivant une ligne, il restera le même quand le point de contact (x, y, z) décrira la ligne en question; si alors $F = 0$ est l'équation de la surface et $f(x, y, z, a) = 0$ l'équation des lignes de contact, $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ seront des fonctions du seul paramètre a, en sorte que l'on en conclut que

$$p = \text{fonct.}(q),$$

c'est-à-dire que la surface est développable.

On peut d'ailleurs prouver que, tout le long d'une ligne suivant laquelle un plan touche une surface, on a

$$rt - s^2 = 0 \qquad \left(r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \cdots\right),$$

de sorte que, si partout une surface est touchée par un plan suivant une ligne, cette surface est développable.

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que, le plan tangent ayant pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

cette équation devra rester la même quand on changera x en $x + dx$, y en $y + dy$ et z en $z + \Delta z$; or elle devient alors

$$Z - z - \Delta z = p(X - x - dx) + q(Y - y - dy);$$

et il faut que

$$\Delta z = p\,dx + q\,dy = dz \qquad \text{ou} \qquad \Delta z - dz = 0;$$

donc, en vertu de la formule de Taylor,

$$\tfrac{1}{2}d^2z + \tfrac{1}{6}d^3z + \ldots = 0,$$

ce qui exige que

$$d^2z = 0, \qquad d^3z = 0, \qquad \ldots.$$

L'équation

$$(1) \qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0$$

détermine la direction dx, dy le long de laquelle il y a contact, et l'on voit qu'en général il existe deux directions dans lesquelles le plan tangent reste, en se déplaçant, sensiblement parallèle à lui-même; mais, si l'on veut qu'il reste rigoureusement fixe, il faudra exprimer que $dp = 0$ et $dq = 0$, ou que l'on a à la fois

$$r\,dx + s\,dy = 0, \qquad s\,dx + t\,dy = 0,$$

ce qui donne $rt - s^2 = 0$; l'équation (1) a alors ses racines égales et les deux directions, dans lesquelles le plan tangent ne se déplace presque pas, sont confondues.

XXXII. — Circonscrire une développable à une surface donnée.

L'équation $q = \varphi(p)$ ou

$$(1) \qquad F(p, q) = 0$$

caractérise, comme nous avons vu, les surfaces développables.

Supposons que, dans cette formule (1) (qui est une identité quand il s'agit d'une surface développable), on remplace p et q par le p et le q d'une autre surface S quelconque; l'équation (1) cessera d'être identique, elle établira une relation entre les coordonnées des points de la surface S; elle représentera alors le lieu des points de cette surface S, pour lesquels le plan tangent est celui d'une développable; (1) est donc l'équation de la courbe de contact d'une développable cir-

conscrite. Si l'on suppose que la surface S ait pour équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

la formule (1) peut être remplacée par

$$(2) \qquad F\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

où F représente alors une fonction homogène.

Une question se pose immédiatement : Peut-on circonscrire à une surface donnée une développable suivant une courbe donnée tracée sur la surface? La réponse à cette question sera affirmative, si l'on observe qu'on obtiendra une développable circonscrite suivant la courbe donnée, en cherchant l'enveloppe des plans tangents à la surface menés par les points de la courbe donnée.

Il n'en est plus de même quand on se donne la relation $F(p, q) = 0$, par exemple quand on dit que la surface circonscrite est un cône ou un cylindre.

C'est ici l'occasion de faire connaître une nouvelle méthode pour circonscrire un cône ou un cylindre à une surface. Pour circonscrire le cône, on peut chercher l'enveloppe des plans tangents à la surface passant par le sommet censé donné du cône. Pour circonscrire un cylindre, on cherche l'enveloppe des plans tangents parallèles à une droite fixe.

Par exemple, l'équation générale des plans tangents à un ellipsoïde est

$$(1) \quad x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma} = 0;$$

si l'on pose

$$(2) \qquad \lambda\cos\alpha + \mu\cos\beta + \nu\cos\gamma = 0,$$

ce plan tangent sera parallèle à une droite fixe son enveloppe s'obtiendra en observant que

$$(3) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

et en éliminant α, β, γ entre (1), (2), (3) et

$$\begin{vmatrix} x+\frac{1}{R}a^2\cos\alpha & y+\frac{1}{R}b^2\cos\beta & z+\frac{1}{R}c^2\cos\gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}=0,$$

R désignant, pour abréger, le radical. Les calculs auxquels conduit cette méthode paraissent moins simples, en général, que ceux que nous avons indiqués plus haut.

Le problème qui consiste à circonscrire une développable à une surface donnée est indéterminé, tant qu'on ne fait pas connaître la nature de la développable que l'on veut circonscrire. Le problème devient parfaitement déterminé quand on se propose de circonscrire une développable à deux surfaces données; cette développable peut se définir : l'enveloppe du plan tangent commun aux deux surfaces. C'est dans un autre Chapitre que nous verrons le rôle important de cette développable.

Nous aurions encore un bon nombre de questions à résoudre sur les développables, mais ces questions seront mieux placées ailleurs, où nous disposerons de moyens plus puissants pour les étudier.

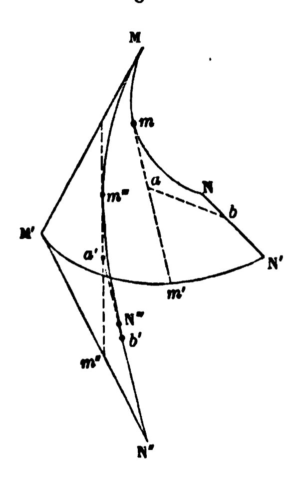
XXXIII. — Étymologie du mot développable.

Considérons une surface développable. Soient MN son arête de rebroussement, M'N' une section plane; soient MM' et NN' deux génératrices. Menons dans le plan de la section plane la tangente M'N'' à M'N'; le plan MM'N'' sera tangent à la surface. Prenons sur M'N'' une longueur $M'm''=M'm'$ et par le point m'' menons une droite $m''m'''$ dans le plan tangent qui fasse avec M'N'' un angle égal à l'angle que mm' fait avec la courbe M'N'; prenons enfin $m''m'''=m'm$, la courbe lieu des points m'' sera dite la transformée de MmN. Plus généralement, si l'on prend $m''a'=m'a$, le point a' sera le transformé de a et une courbe décrite par le point a sur la surface

développable aura pour *transformée* le lieu des points correspondants a' de a. L'ensemble des figures *transformées*, de celles qui sont tracées sur la développable, constitue ce que l'on appelle le *développement* de la surface.

Quand on fait le développement d'une surface développable, les courbes transformées sont égales en longueur à

Fig. 36.



leurs correspondantes. Si, en effet, on suppose $m'N'$ infiniment petit, tout quadrilatère tel que $abm'N'$ sera égal à son correspondant $a'b'm''N''$ par construction; donc ab sera égal à sa transformée $a'b'$ aux termes du troisième ordre près; en appelant ds et ds' ces deux arcs, on aura donc $ds = ds'$ ou $s = s'$.

Il résulte de là que, si l'on fend la surface suivant des génératrices voisines et si l'on fait tourner chaque élément de surface autour de ses bords rectilignes de manière à amener toûtes les génératrices dans un même plan, elle coïncidera avec la figure transformée; elle est donc susceptible de se *développer* et de s'étaler sur un plan.

Il est bon d'observer que les courbes qui coupent les génératrices à angle droit deviennent après le développement les développantes de la transformée de l'arête de rebroussement.

XXXIV. — Théorie des développables isotropes.

Prenons des coordonnées rectangulaires :

L'équation des sphères de rayon nul ayant leur centre en α, β, γ est

$$(x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2=0 \qquad (t=1);$$

cette équation peut être censée représenter un cône imaginaire de sommet α, β, γ; un pareil cône, asymptote de toutes les sphères ayant leur centre en α, β, γ, s'appelle un *cône isotrope*, ses génératrices sont ce qu'on appelle des *droites isotropes*. Si l'on désigne par a, b, c les coefficients directeurs d'une droite isotrope, on aura alors

$$a^2+b^2+c^2=0;$$

cette équation caractérise les droites isotropes qui, en vertu même de cette équation, sont perpendiculaires sur elles-mêmes. Si l'on suppose $c=0$, on a $a^2+b^2=0$, et l'on voit que les droites isotropes du plan des xy ont pour coefficients angulaires $\pm\sqrt{-1}$.

Un *plan isotrope* est un plan asymptote de sphère; c'est, si l'on veut, un plan tangent à un cône isotrope. Dans un plan isotrope, les ombilics sont confondus. Deux plans isotropes infiniment voisins se coupent suivant une droite isotrope, et deux droites isotropes infiniment voisines se coupant en un point α, β, γ déterminent un plan isotrope.

Toutes les sphères passent par une conique fixe située dans le plan de l'infini, qui est imaginaire et que nous appellerons l'*ombilicale* (Laguerre) ou le cercle imaginaire de l'infini. Cette conique ombilicale est d'ailleurs le lieu des ombilics de tous les plans de l'espace.

Toutes les droites isotropes passant par un point de l'espace forment un *cône isotrope* ou une *sphère de rayon nul* ayant son centre en ce point.

L'ombilicale est le lieu des traces de toutes les droites isotropes sur le plan de l'infini ($t = 0$).

Par une droite quelconque passent deux plans dont les traces sur le plan de l'infini touchent l'ombilicale : ces plans sont dits *plans isotropes* relatifs à cette droite.

On appelle *développables isotropes* celles dont les génératrices sont isotropes ; elles sont par suite des enveloppes de plans isotropes.

A toute surface on peut circonscrire une développable isotrope qui sera dite *développable isotrope* de cette surface.

Les développables isotropes jouissent de cette propriété curieuse que *leurs normales sont précisément leurs génératrices*. En effet, considérons une droite isotrope ; cette droite est une génératrice du cône

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0;$$

on peut donc la représenter par

$$(1)\qquad \frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{b} = \frac{z-\gamma}{c} = \rho, \qquad a^2+b^2+c^2 = 0.$$

Si l'on veut que cette droite engendre une développable, il faut exprimer que dans une quelconque de ses positions elle rencontre la droite voisine. A cet effet, écrivons (1) ainsi :

$$x = \alpha + a\rho, \qquad y = \beta + b\rho, \qquad z = \gamma + c\rho;$$

la droite voisine a pour équations

$$x = \alpha + d\alpha + (a + da)\rho + (\rho + d\rho)a, \qquad \ldots;$$

l'élimination de $x, y, z, \rho, d\rho$ conduira à l'équation de condition cherchée. L'élimination de x, y, z se fait par soustraction, et l'on a

$$\begin{aligned} 0 &= d\alpha + a\,d\rho + \rho\,da, \\ 0 &= d\beta + b\,d\rho + \rho\,db, \\ 0 &= d\gamma + c\,d\rho + \rho\,dc; \end{aligned}$$

on élimine ρ et $d\rho$ en multipliant ces équations par a, b, c et en observant que, $a^2 + b^2 + c^2$ étant nul, on a

$$a\,da + b\,db + c\,dc = 0;$$

on a alors, en ajoutant,

$$a\,d\alpha + b\,d\beta + c\,d\gamma = 0,$$

ce qui montre que la direction a, b, c de la génératrice est perpendiculaire à celle de la ligne $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ tracée sur la surface; or la direction a, b, c est déjà perpendiculaire à elle-même puisque $a^2 + b^2 + c^2 = 0$; donc la génératrice d'une développable isotrope est normale à la surface.

La développable en question doit être telle que, si l'on pose $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, on ait

$$p^2 + q^2 + 1 = 0,$$

ce qui exprime que la normale à la surface est normale à elle-même. Réciproquement, cette équation est celle d'une développable : pour avoir son équation finie, il faut chercher l'enveloppe du plan représenté par l'équation

$$Z = pX + qY + f(p),$$

où $f(p)$ est quelconque et où $q = \sqrt{1+p^2}\sqrt{-1}$. La caractéristique, ou la génératrice de l'enveloppe, sera donnée par l'équation précédente et sa dérivée

$$0 = X + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\sqrt{-1}\,Y + f'(p).$$

Les coefficients directeurs de cette droite sont

$$-p\sqrt{-1}, \qquad \sqrt{1+p^2}, \qquad \sqrt{-1},$$

et la somme de leurs carrés fait 0. Donc la génératrice est isotrope : ainsi l'équation

$$p^2 + q^2 + 1 = 0$$

caractérise les développables isotropes.

XXXV. — Des foyers et des focales des surfaces.

On appelle *foyer* d'une surface le centre d'une sphère de rayon nul, doublement tangente à la surface.

La sphère de rayon nul est un cône : on peut donc dire aussi que le *foyer* d'une surface est le sommet d'un cône isotrope doublement tangent à la surface.

Il résulte de là qu'un foyer est un point d'où l'on peut mener deux plans tangents isotropes à la surface.

Joignons le foyer F aux points de contact M et M′ avec la surface du cône isotrope de sommet F; FM et FM′ seront deux génératrices du cône isotrope bitangent : ce seront deux droites isotropes tangentes à la surface.

Ceci posé, on appelle *focale* d'une surface le lieu de ses foyers.

Assujettir une sphère à toucher une surface, c'est l'assujettir à une seule condition; l'assujettir à être doublement tangente à une surface, c'est l'assujettir à deux conditions; l'assujettir à avoir un rayon nul, c'est l'assujettir à une troisième condition : donc, en général, il existera un lieu de foyers qui sera une ligne.

Ainsi se trouve démontrée l'existence des focales. Mais on peut en donner une autre définition qui aura son utilité.

Par tous les points F de la focale Φ de la surface S, faisons passer les cônes bitangents; soient FM et FM′ les génératrices de contact et appelons P et P′ les plans de contact correspondants. Le plan P coupe le plan infiniment voisin suivant une droite isotrope passant en F, et qui ne peut être qu'une génératrice du cône isotrope ayant son sommet en F; cette droite est alors FM; les génératrices de contact FM et FM′ sont donc des génératrices de la développable isotrope circonscrite à la surface S. Or cette développable est bien déterminée, puisque, son équation différentielle étant

$$p^2 + q^2 + 1 = 0,$$

c'est aussi l'équation de sa courbe de contact avec la surface. Cette développable se coupe elle-même, puisque deux de ses génératrices passent par un même point (sans faire un angle infiniment petit); elle a donc une ligne suivant laquelle elle se coupe elle-même ou, comme on le dit quelquefois, une

ligne double ou *singulière*. Cette ligne double est la focale de S. Ainsi :

La focale d'une surface est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à la surface.

Deux surfaces sont *homofocales* quand elles ont les mêmes focales.

XXXVI. — Focales et foyers des surfaces du second ordre.

On trouvera facilement les focales des surfaces du second ordre en observant que, si $S = 0$ désigne une surface de cet ordre, $S + \lambda PQ = 0$, P et Q représentant deux polynômes du premier degré, représente l'équation des surfaces du second ordre bitangentes à la première. En exprimant que cette surface est une sphère de rayon nul

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0,$$

α, β, γ représenteront les foyers : on devra donc avoir identiquement

$$S + \lambda PQ = \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2],$$

μ étant un facteur constant, ou

$$S - \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] = \lambda PQ.$$

Le premier membre de cette identité devra donc se ramener à une somme de deux carrés.

Soit

$$S = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - H = 0$$

l'équation donnée,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \mu[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)]^2 - H$$

devant être une somme de deux carrés, il est nécessaire qu'une des variables disparaisse : donc $\alpha = 0$ et $\mu = A$; donc

$$By^2 + Cz^2 - A[(y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] - H$$

doit être une somme de deux carrés; or cette quantité peut s'écrire

$$(B - A)y^2 + (C - A)z^2 + 2A\beta y + 2A\gamma z - A(\beta^2 + \gamma^2) - H$$

ou

$$\frac{1}{B - A}[(B - A)y + A\beta]^2 + \frac{1}{C - A}[(C - A)z + A\gamma]^2 - \frac{A^2\beta^2}{B - A} - \frac{A^2\gamma^2}{C - A} - A(\beta^2 + \gamma^2) - H,$$

et sera une somme de deux carrés si l'on a

$$\frac{B\beta^2}{B - A} + \frac{C\gamma^2}{C - A} + \frac{H}{A} = 0.$$

Cette équation jointe à $\alpha = 0$ représente la focale. Il y a donc trois coniques focales, une dans chaque plan principal. Quand $H = 0$, ces coniques se réduisent à des droites; ainsi les cônes ont pour focales des lignes droites.

Supposons qu'il s'agisse d'un ellipsoïde dont les axes soient $2a > 2b > 2c$; les focales auront pour équations

$$\frac{\beta^2}{a^2 - b^2} + \frac{\gamma^2}{a^2 - c^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{\gamma^2}{b^2 - c^2} + \frac{\alpha^2}{b^2 - a^2} + 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{c^2 - a^2} + \frac{\beta^2}{c^2 - b^2} + 1 = 0.$$

La première est imaginaire, la seconde est une hyperbole, la dernière une ellipse.

On voit que ces équations ne dépendent que des différences des axes; les surfaces comprises dans la formule

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1,$$

sont donc homofocales, les sections principales ont les mêmes foyers. L'étude de ces surfaces homofocales sera faite plus loin.

Pour trouver les focales du paraboloïde

$$Px^2 + Qy^2 = 2z,$$

on devra faire en sorte que

$$Px^2 + Qy^2 - 2z - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2]$$

soit une somme de deux carrés; il faut donc que $\lambda = P$ ou Q et que α ou β soit nul; il faut ensuite qu'en décomposant

$$Px^2 - Q(x-\alpha)^2 - Q(z-\gamma)^2 - 2z$$

en carrés, on n'en trouve que deux, ce qui exige que

$$\frac{PQ\alpha^2}{Q-P} - \frac{2Q\gamma - 1}{Q} = 0.$$

En particulier, pour le paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z,$$

on a les deux focales

$$\frac{\alpha^2}{p-q} - 2\gamma + q = 0,$$
$$\frac{\beta^2}{q-p} - 2\gamma + p = 0,$$

qui sont des paraboles.

Nous énoncerons seulement les propriétés suivantes des focales, sans les démontrer :

Le plan tangent et la normale en un point d'une surface du second ordre rencontrent un plan principal suivant un point et une droite qui sont, l'un le pôle, et l'autre la polaire correspondante de la focale. (Chasles.)

La distance d'un point de la surface à un foyer est un produit de deux fonctions linéaires. (Amiot.)

Si l'on appelle foyer d'une courbe du second degré dans l'espace les points tels que leurs distances à un point de la courbe soient des fonctions linéaires des coordonnées de ce point. Les points d'une focale seront les foyers de l'autre. (Amiot.)

La somme ou la différence des distances de deux foyers fixes d'une courbe de second degré à un point de cette courbe est constante.

Dans un cône, les focales se réduisent à des droites réelles ou imaginaires, ainsi que nous l'avons fait observer; ces droites focales jouissent des propriétés suivantes :

La somme des angles que font les plans passant par une génératrice du cône et les focales est constante.

Un cône du second degré est coupé par une sphère suivant une courbe appelée ellipse sphérique, quand le sommet du cône est au centre de la sphère. Les focales rencontrent la sphère en des points appelés foyers et tels que la somme des rayons sphériques, issus de ces points et aboutissant à un point de la courbe, est constante.

XXXVII. — Surfaces homofocales du second degré.

L'équation générale des surfaces homofocales du second degré, c'est-à-dire des surfaces ayant les mêmes focales, est

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1,$$

ρ désignant un paramètre variable.

1° *Ces surfaces sont telles que leurs sections principales ont les mêmes foyers que celles de l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

2° *Par chaque point réel de l'espace passent trois surfaces de la famille, qui sont réelles; l'une est un ellipsoïde, les deux autres sont des hyperboloïdes à une et deux nappes.*

En effet, si l'on se donne x, y, z, il en résulte pour ρ trois valeurs, en vertu de l'équation (1) qui est du troisième degré; ces trois valeurs sont réelles : pour s'en assurer, il suffit de supposer $a > b > c$ et de faire, successivement,

$$\rho=-\infty, \quad \rho=-a^2-\varepsilon, \quad \rho=-a^2+\varepsilon, \quad \rho=-b^2-\varepsilon,$$
$$\rho=-b^2+\varepsilon, \quad \rho=-c^2-\varepsilon, \quad \rho=-c^2+\varepsilon, \quad \rho=\infty,$$

ε désignant une quantité très petite, mais positive; la fonction $\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1$ prend les signes respectifs

$$-,\quad -,\quad +,\quad -,\quad +,\quad -,\quad +,\quad -.$$

Il y a donc une racine entre $-a^2$ et $-b^2$, une entre $-b^2$ et $-c^2$, une entre $-c^2$ et $+\infty$; appelant λ, μ, ν ces racines, on a, pour les équations des trois surfaces réelles passant en x, y, z,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,\\
&\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1,\\
&\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1,
\end{aligned}\right.$$

et, en supposant

$$-a^2<\lambda<-b^2<\mu<-c^2<\nu,$$

la première surface sera un hyperboloïde à deux nappes, la seconde un hyperboloïde à une nappe et la troisième un ellipsoïde.

3° λ, μ, ν *étant donnés, on peut se proposer de calculer* x, y, z.

A cet effet, observons que λ, μ, ν sont racines de l'équation (1), qu'on peut écrire

$$\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{u+b^2-a^2}+\frac{z^2}{u+c^2-a^2}=1,$$

en posant $\rho=u-a^2$; cette équation elle-même prend la forme entière

$$x^2(u+b^2-a^2)(u+c^2-a^2)+\ldots-u(u+b^2-a^2)(u+c^2-a^2)=0.$$

Le produit des racines est $x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)$; or les racines sont $\lambda+a^2$, $\mu+a^2$, $\nu+a^2$: on a donc

$$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)$$

ou

$$(3)\quad \begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu + a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}}, \\ y = \sqrt{\dfrac{(\lambda + b^2)(\mu + b^2)(\nu + b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}}, \\ z = \sqrt{\dfrac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)(\nu + c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}. \end{cases}$$

4° *Les surfaces homofocales* (2) *se coupent à angle droit, c'est-à-dire que leurs plans tangents, ou leurs normales aux points communs, se coupent ainsi.*

En effet, si l'on retranche, par exemple, l'une de l'autre les formules (2), on a

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{x^2}{a^2 + \mu} + \ldots = 0;$$

comme

$$\frac{x^2(\mu - \lambda)}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)} = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)} - \frac{x^2}{(a^2 + \mu)},$$

on peut écrire l'équation précédente ainsi

$$\frac{x}{a^2 + \lambda}\,\frac{x}{a^2 + \mu} + \frac{y}{b^2 + \lambda}\,\frac{y}{b^2 + \mu} + \frac{z}{c^2 + \lambda}\,\frac{z}{c^2 + \mu} = 0,$$

ce qui exprime que les directions

$$\frac{x}{a^2 + \lambda},\quad \frac{y}{b^2 + \lambda},\quad \frac{z}{c^2 + \lambda}$$

et

$$\frac{x}{a^2 + \mu},\quad \frac{y}{b^2 + \mu},\quad \frac{z}{c^2 + \mu}$$

des normales aux surfaces (2) en x, y, z sont rectangulaires; donc, etc. C. Q. F. D.

XXXVIII. — Points correspondants.

On appelle *points correspondants,* sur deux surfaces homofocales de même famille et de même espèce, deux points situés sur une même courbe du quatrième ordre, intersection

de deux surfaces homofocales, orthogonales à celles-ci et d'espèce différente.

Ainsi, deux points correspondants sur deux ellipsoïdes homofocaux sont deux points situés sur la courbe d'intersection de deux hyperboloïdes homofocaux à ces ellipsoïdes, l'un à une, l'autre à deux nappes. Les points correspondants jouissent de propriétés curieuses qui ont été utilisées en Mécanique et c'est pour cette raison que nous les ferons connaître.

D'abord faisons varier ν dans les équations (3) en faisant λ et μ égaux à des constantes. On voit que, si x', y', z' désignent les valeurs que prennent x, y, z quand on y remplace ν par ν', on a

$$\frac{x^2}{x'^2} = \frac{\nu + a^2}{\nu' + a^2}, \qquad \frac{y^2}{y'^2} = \frac{\nu + b^2}{\nu' + b^2}, \qquad \frac{z^2}{z'^2} = \frac{\nu + c^2}{\nu' + c^2};$$

donc *les coordonnées de même nom de deux points correspondants sont entre elles comme les axes qui leur sont parallèles.*

En posant $\frac{x}{x'} = +\sqrt{\frac{\nu + a^2}{\nu' + a^2}}$ et non $-\sqrt{\frac{\nu + a^2}{\nu' + a^2}}$, ..., on fera correspondre sans ambiguïté un point d'un ellipsoïde à un autre point et à un seul de l'autre ellipsoïde : c'est ce que nous ferons à l'avenir.

THÉORÈME I. — *La différence des carrés des distances des deux points correspondants au centre est constante.*

En effet, d'après les formules (3), on a

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) &= \sum \frac{(\lambda + a^2)(\mu + a^2)(\nu - \nu')}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &= \lambda\mu(\nu - \nu') \sum \frac{1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &\quad + \lambda(\nu - \nu') \sum \frac{a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &\quad + \mu(\nu - \nu') \sum \frac{a^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &\quad + (\nu - \nu') \sum \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}; \end{aligned}$$

les coefficients de $\lambda\mu$, λ, μ, sont identiquement nuls, celui du dernier terme est égal à un : donc la différence en question est $\nu - \nu'$. C. Q. F. D.

Téorème II. — *Soient* M *et* N *deux points,* M' *et* N' *leurs correspondants ; on a*

$$MN' = NM' ;$$

en effet, soient x, y, z les coordonnées de M; x', y', z' celles de son correspondant M'; x_1, y_1, z_1 celles de N, et x'_1, y'_1, z'_1 celles de N', on aura

$$\overline{MN'}^2 = (x - x'_1)^2 + (y - y'_1)^2 + (z - z'_1)^2 ;$$

or

$$\frac{x'_1}{x_1} = \sqrt{\frac{\nu' + a^2}{\nu + a^2}}, \qquad \ldots ;$$

donc

$$\overline{MN'}^2 = \frac{1}{\nu + a^2}\left(x\sqrt{\nu + a^2} - x_1\sqrt{\nu' + a^2}\right)^2 + \ldots .$$

On trouve de même

$$\overline{M'N}^2 = \frac{1}{\nu + a^2}\left(x\sqrt{\nu' + a^2} - x_1\sqrt{\nu + a^2}\right)^2 + \ldots ;$$

donc

$$\overline{MN'}^2 - \overline{M'N}^2 = \frac{1}{\nu + a^2}(x^2 - x_1^2)(\nu - \nu') + \ldots .$$

Mais, en vertu des équations

$$\frac{x^2}{\nu + a^2} + \frac{y^2}{\nu + b^2} + \frac{z^2}{\nu + c^2} = 1, \qquad \ldots$$

on a

$$\overline{MN'}^2 - \overline{NM'}^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad MN' = NM'.$$

C. Q. F. D.

XXXIX. — Théorème de Chasles.

Lorsqu'un cône est circonscrit à une surface du second ordre, ses axes sont dirigés suivant les normales aux surfaces homofocales passant par son sommet.

Supposons que a, b, c soient les demi-axes de la surface en question; si l'on pose

$$H = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

l'équation du cône circonscrit ayant son sommet en x, y, z sera

$$H\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1\right) - \left(\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} + \frac{Zz}{c^2} - 1\right)^2 = 0$$

ou

$$X^2\left(\frac{H}{a^2} - \frac{x^2}{a^4}\right) + \ldots - 2YZ\frac{yz}{b^2c^2} - \ldots = 0.$$

Les directions principales de ce cône sont données par la formule

$$(1) \qquad S = \frac{\left(\frac{H}{a^2} - \frac{x^2}{a^4}\right)\alpha - \frac{xy}{a^2b^2}\beta - \frac{zx}{c^2a^2}\gamma}{\alpha} = \ldots;$$

remplaçons α, β, γ par $\frac{x}{a^2+\lambda}$, $\frac{y}{b^2+\lambda}$, $\frac{z}{c^2+\lambda}$, où λ, μ, ν sont les quantités qui, égalées à des constantes, fournissent les surfaces homofocales passant en x, y, z; nous aurons

$$S = \frac{\left(\frac{H}{a^2} - \frac{x^2}{a^4}\right)\frac{x}{a^2+\lambda} - \frac{xy}{a^2b^2}\frac{y}{b^2+\lambda} - \frac{xz}{a^2c^2}\frac{z}{c^2+\lambda}}{\frac{x}{a^2+\lambda}} = \ldots;$$

or on a

$$\begin{aligned}&\frac{x}{a^2}\frac{x}{a^2+\lambda} + \frac{y}{b^2}\frac{y}{b^2+\lambda} + \frac{z}{c^2}\frac{z}{c^2+\lambda}\\ &\quad = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}\right) = \frac{H}{\lambda}.\end{aligned}$$

L'équation qui précède devient alors

$$S = \frac{\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{H}{a^2} - \frac{x}{a^2}\frac{H}{\lambda}}{\frac{x}{a^2+\lambda}} = \ldots$$

ou

$$S = -\frac{H}{\lambda} = \ldots.$$

Les équations (1), aux coefficients directeurs des axes, sont donc satisfaites quand on y suppose les coefficients égaux aux coefficients directeurs des normales aux surfaces homofocales passant par le sommet du cône.

REMARQUE. — L'équation du cône rapporté à ses axes est

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} + \frac{z^2}{\nu} = 0.$$

XL. — Paraboloïdes homofocaux.

Les focales du paraboloïde

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$$

sont

$$\frac{x^2}{p-q} - 2z + q = 0, \qquad \frac{y^2}{p-q} - 2z + p = 0;$$

celles du paraboloïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{p+h} + \frac{y^2}{q+h} = 2z + h$$

sont

$$\frac{x^2}{(p+h)-(q+h)} - 2z + (q+h) - h = 0, \qquad \ldots$$

ou

$$\frac{x^2}{p-q} - 2z + q = 0, \qquad \ldots.$$

Les paraboloïdes

$$\frac{x^2}{p+h} + \frac{y^2}{q+h} = 2z + h$$

sont donc homofocaux :

1° *Les coordonnées des foyers des sections principales sont* $z = \frac{p}{2}$, $z = \frac{q}{2}$; *ces foyers sont donc les mêmes pour toutes les surfaces considérées.*

2° *Par chaque point réel de l'espace passent trois paraboloïdes de la famille* (1), *deux elliptiques inversement semblables et un hyperbolique.*

En effet, si l'on se donne x, y, z, l'équation (1) sera du troisième degré en h, et si l'on fait, en supposant $p > q$ et ε positif et infiniment petit,

$$h = -\infty, \quad h = -p - \varepsilon, \quad h = -p + \varepsilon, \quad h = -q - \varepsilon,$$

la quantité

$$\frac{x^2}{h+p} + \frac{y^2}{h+q} - 2z - h$$

prendra les signes respectifs

$$+, \quad -, \quad +, \quad -;$$

il y a donc une racine de (1) entre $-\infty$ et $-p$, une autre entre $-p$ et $-q$, et nécessairement une troisième entre q et $+\infty$. Soient λ, μ, ν ces trois racines; les équations des paraboloïdes homofocaux passant en x, y, z seront

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{p+\lambda} + \dfrac{y^2}{q+\lambda} = 2z + \lambda, \\ \dfrac{x^2}{p+\mu} + \dfrac{y^2}{q+\mu} = 2z + \mu, \\ \dfrac{x^2}{p+\nu} + \dfrac{y^2}{q+\nu} = 2z + \nu; \end{cases}$$

la première et la dernière représentent des paraboloïdes elliptiques, la seconde un paraboloïde hyperbolique.

3° λ, μ, ν *étant donnés, on peut se proposer de calculer* x, y, z.

On y parviendra comme il suit : on éliminera d'abord z par soustraction et l'on aura

$$\frac{x^2}{(p+\lambda)(p+\mu)} + \frac{y^2}{(q+\lambda)(q+\mu)} = -1,$$
$$\frac{x^2}{(p+\lambda)(p+\nu)} + \frac{y^2}{(q+\lambda)(q+\nu)} = -1;$$

en considérant alors $\frac{x^2}{p+\lambda}$ et $\frac{y^2}{q+\lambda}$ comme inconnues, on aura

$$\left\{\begin{aligned} x^2 &= \frac{(p+\lambda)(p+\mu)(p+\nu)}{q-p},\\ y^2 &= \frac{(q+\lambda)(q+\mu)(q+\nu)}{p-q},\\ -2z &= p+q+\lambda+\mu+\nu. \end{aligned}\right.$$

4° *Les paraboloïdes homofocaux* (2) *se coupent à angle droit.*

Pour le démontrer, il suffit de retrancher membre à membre deux des formules (2); on aura

$$\frac{x^2}{(p+\lambda)(p+\mu)}+\frac{y^2}{(q+\lambda)(q+\mu)}+1=0,$$

ce qui exprime bien que les deux directions

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{x}{p+\lambda}, & \dfrac{y}{q+\lambda}, & -1,\\ \dfrac{x}{p+\mu}, & \dfrac{y}{q+\mu}, & -1, \end{array}$$

qui sont celles de deux normales aux surfaces homofocales, sont rectangulaires.

On peut considérer, sur deux paraboloïdes homofocaux, des *points correspondants;* leurs propriétés sont analogues à celles des points correspondants sur deux ellipsoïdes homofocaux.

XLI. — Des coordonnées tangentielles.

Si l'on considère le plan représenté par l'équation

$$(1)\qquad x\xi+y\eta+z\zeta=1,$$

et dont les coordonnées à l'origine sont $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$, $\frac{1}{\zeta}$, ce plan sera parfaitement déterminé quand on se donnera ξ, η, ζ : on a donné à ces quantités le nom de *coordonnées tangentielles*

du plan. Lorsque l'on établit, entre les coordonnées de ce plan, une relation telle que

$$(2) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

l'équation (1) devient celle d'une famille de plans qui enveloppent une surface. L'équation (2) est dite l'*équation tangentielle* de cette surface; ξ, η, ζ seront alors les coordonnées tangentielles d'un plan tangent de cette surface.

Équations du premier degré. — *Toute équation tangentielle du premier degré représente un point, et, réciproquement, tout point peut être représenté par une équation du premier degré.*

En effet, une équation du premier degré entre ξ, η, ζ permet de calculer ζ en fonction linéaire de ξ et de η; en portant cette valeur dans (1), cette équation contiendra deux paramètres variables au premier degré; elle représentera donc une série de plans passant par un point fixe et qui, par suite, envelopperont un point fixe. Les coordonnées ordinaires du point représenté par l'équation

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d$$

s'obtiendront en égalant à zéro les coefficients de ζ, de η et le terme indépendant de l'équation

$$x\,\frac{d - b\eta - c\zeta}{a} + y\eta + z\zeta = 1,$$

ce qui donne

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{d}.$$

Réciproquement, si les coordonnées d'un point sont a, b, c, son équation tangentielle sera la relation qui doit exister entre ξ, η, ζ pour que le plan (1) passe par ce point, ou

$$a\xi + b\eta + c\zeta = 1.$$

Remarquons, en passant, que le plan dont les coordonnées tangentielles sont nulles est à l'infini, et que le plan dont le ξ seul est nul est parallèle à l'axe des x. Le plan dont le ξ et l'η sont nuls est parallèle au plan des xy.

Une équation du premier degré entre ξ, η, ζ ne contenant pas de terme indépendant représente un point à l'infini. Une équation dans laquelle il n'entre que ξ et η représente un point situé sur l'axe des z. Une équation qui ne contient que ξ représente un point situé dans le plan des yz. Enfin const. $= 0$ représente, comme cas limite, l'origine.

Équations du second degré. — *Une équation du second degré, en coordonnées tangentielles, représente une surface du second ordre, et, réciproquement, les surfaces du second ordre sont représentées, en coordonnées tangentielles, par des équations du second degré.*

En effet, pour avoir, en coordonnées ordinaires, l'équation de la surface représentée, en coordonnées tangentielles, par

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

il faut éliminer ξ, η, ζ entre cette équation, l'équation (1) et

$$\frac{\partial(f, x\xi + y\eta + z\zeta - 1)}{\partial(\xi, \eta)} = 0,$$
$$\frac{\partial(f, x\xi + y\eta + z\zeta - 1)}{\partial(\eta, \zeta)} = 0,$$
$$\frac{\partial(f, x\xi + y\eta + z\zeta - 1)}{\partial(\zeta, \xi)} = 0,$$

ou bien entre les équations

$$f = 0, \qquad x\xi + y\eta + z\zeta - 1 = 0, \qquad \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Pour faire cette élimination, on rend les formules homogènes par l'introduction de deux variables t et τ, et l'on égale la suite des rapports $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \xi}$, $\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \eta}$, $\frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \zeta}$ à un paramètre ρ ; on est

alors conduit à éliminer ξ, η, ζ, ρ entre

$$x\xi + y\eta + z\zeta - t\tau = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \rho x, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \rho y, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \rho z,$$

et celle-ci, que l'on en conclut par le théorème des fonctions homogènes appliqué à la fonction f,

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \rho t.$$

Quand la fonction f est du second degré, les équations précédentes sont linéaires, et le résultat, facile à obtenir, est du second degré; mais, quand f est de degré supérieur, la résultante est, en général, de degré supérieur à celui de la fonction f. Si l'on a

$$\begin{aligned} f = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + a_{44}\tau^2 \\ + 2a_{21}\xi\eta + 2a_{31}\xi\zeta + 2a_{41}\xi\tau \\ + 2a_{23}\eta\zeta + 2a_{24}\eta\tau + 2a_{34}\zeta\tau, \end{aligned}$$

l'équation de l'enveloppe sera

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & z \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & -1 \\ x & y & z & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, étant donnée l'équation du second degré en coordonnées ordinaires

$$\begin{aligned} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{44}t^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz \\ + 2A_{14}xt + 2A_{23}yz + 2A_{24}yt + 2A_{34}zt = 0, \end{aligned}$$

pour obtenir l'équation tangentielle correspondante, il faut exprimer que le plan représenté par

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est tangent, ce qui donne, comme on l'a vu,

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \xi \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \eta \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \zeta \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & -1 \\ \xi & \eta & \zeta & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

formule analogue à celle que l'on a trouvée tout à l'heure pour solution du problème inverse.

XLII. — Quelques problèmes sur la droite et le plan, surfaces développables.

Il y a des surfaces qui ne peuvent pas être représentées par une équation tangentielle : ce sont les surfaces développables, parce que leur plan enveloppe ne doit contenir qu'un seul paramètre variable; il faudra donc, pour définir une surface développable, deux équations. Réciproquement, deux équations entre des coordonnées tangentielles représenteront l'enveloppe du plan

$$(1) \qquad x\xi + y\eta + \zeta z = 1,$$

dans l'équation duquel il ne restera plus qu'un seul paramètre variable; ce sera donc une surface développable.

Mais considérons les deux équations

$$(2) \qquad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

$$(3) \qquad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

d'une développable; chacune d'elles représente une enveloppe. Si l'on considère les coordonnées ξ, η, ζ d'un plan satisfaisant aux équations (2), (3), ce plan sera tangent à (2) et à (3), mais il le sera aussi à la développable (2), (3); cette développable est donc circonscrite aux surfaces (2), (3).

Ainsi deux équations ne représentent pas une courbe, mais bien une surface développable. Toutefois, on pourra consi-

dérer aussi une courbe comme représentée par les équations de la surface développable, lieu de ses tangentes.

Deux équations du premier degré représentent l'enveloppe d'un plan qui ne contient qu'un paramètre variable au premier degré et, par suite, représentent une ligne droite par laquelle passent tous les plans en question et qui est leur enveloppe.

Si l'on considère trois équations en coordonnées tangentielles, leurs solutions communes seront les coordonnées d'un plan qui les touchera toutes les trois. Trois équations du premier degré détermineront donc un plan passant par les trois points représentés par ces équations.

PROBLÈME. — *Trouver l'équation des points situés sur un plan donné.*

L'équation générale du point est

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d.$$

Si l'on désigne par ξ', η', ζ' les coordonnées du plan, on exprimera qu'il passe par le point donné, en écrivant que ce plan, dont l'équation est

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = 1,$$

contient le point dont les coordonnées sont $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$, ce qui donne

$$a\xi' + b\eta' + c\zeta' = d.$$

Il suffit, comme on voit, d'exprimer que *les coordonnées du plan satisfont à l'équation du point.*

PLUS GÉNÉRALEMENT : *Pour exprimer qu'une surface*

$$(1) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

touche un plan ξ', η', ζ', *il suffit d'exprimer que l'on a*

$$f(\xi', \eta', \zeta') = 0;$$

car les solutions de (1) sont, par définition, les coordonnées de ses plans tangents.

Pour résoudre un problème quelconque de coordonnées tangentielles, on peut, quand on ne veut pas procéder directement, avoir recours aux coordonnées cartésiennes et transformer les formules trouvées en coordonnées tangentielles.

Proposons-nous de résoudre la question suivante :

Problème II. — *Trouver la distance d'un plan* (ξ', η', ζ') *à un point*

$$a\xi + b\eta + c\zeta = d.$$

L'équation du plan est

$$x\xi' + y\eta' + z\zeta' = 1,$$

les coordonnées du point sont $-\frac{a}{d}$, $-\frac{b}{d}$, $-\frac{c}{d}$; la solution demandée est donc

$$\frac{a\xi' + b\eta' + c\zeta' + d}{d\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}};$$

le premier membre de l'équation d'un point est donc, à un facteur près, la distance du plan (ξ, η, ζ) au point.

Problème III. — *Trouver l'équation de la sphère ayant son centre à l'origine.*

Cette sphère est l'enveloppe d'un plan situé à la distance R de l'origine; il faut donc exprimer que le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est à la distance R de l'origine : l'équation de la sphère est donc

$$R = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

ou bien

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2,$$

en posant pour la symétrie $\rho = \frac{1}{R}$.

Ces quelques exemples suffisent pour montrer comment on aborderait les autres questions que l'on résout, dans les élé-

ments de Géométrie analytique, avec les coordonnées ordinaires.

XLIII. — Recherche des points de contact des surfaces avec leur plan tangent.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une surface développable donnée par les équations

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0;$$

considérons deux plans tangents infiniment voisins ξ, η, ζ, et $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$; ils se coupent suivant une génératrice; les équations de cette génératrice sont de la forme

$$\frac{\Xi - \xi}{d\xi} = \frac{\mathrm{H} - \eta}{d\eta} = \frac{\mathrm{Z} - \zeta}{d\zeta},$$

et l'on verrait qu'on peut aussi les mettre sous la forme

$$(1) \qquad (\Xi - \xi)\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + (\mathrm{H} - \eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + (\mathrm{Z} - \zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = 0,$$

$$(2) \qquad (\Xi - \xi)\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + (\mathrm{H} - \eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + (\mathrm{Z} - \zeta)\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} = 0.$$

Si l'on considère alors uniquement la surface $\varphi = 0$, en faisant varier la forme de la fonction ψ, toutes les droites (1), (2) passeront par le point fixe (1); or ces droites sont des génératrices des développables circonscrites à $\varphi = 0$. Elles passent toutes par le point de contact correspondant au plan ξ, η, ζ; donc (1) est précisément l'équation du point de contact du plan ξ, η, ζ avec la surface $\varphi = 0$.

On arrive au même résultat en cherchant l'intersection des plans ξ, η, ζ, $\xi + h$, $\eta + k$, $\zeta + l$ et $\xi + h'$, $\eta + k'$, $\zeta + l'$. En rendant l'équation $\varphi = 0$ homogène, l'équation (1) pourra être remplacée par

$$\Xi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \mathrm{H}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \mathrm{Z}\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \Theta\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0.$$

On appelle *classe* d'une surface le nombre de plans tangents qu'on peut lui mener par une droite donnée. Il est facile de voir que *la classe d'une surface est égale au degré de son équation tangentielle.*

En effet, soient

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0, \\ a'\xi + b'\eta + c'\zeta + d' = 0 \end{cases}$$

les équations d'une droite et

$$\text{(S)} \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

l'équation tangentielle de la surface. Les solutions communes à ces trois équations seront les coordonnées des plans tangents à la surface enveloppant la droite D ou passant par cette droite; le nombre de ces solutions est égal au degré de f.

C. Q. F. D.

Une surface de classe m est de degré $m(m-1)^2$, et une surface d'ordre m est de classe $m(m-1)^2$.

En effet, si l'on cherche en combien de points la surface S coupe la droite (D), il faudra exprimer que le point de contact du plan (ξ, η, ζ)

$$\text{(P)} \qquad \Xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \mathrm{H} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \mathrm{Z} \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \Theta \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$$

est situé sur la droite (D), ou, ce qui revient au même, que deux plans $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, \tau_0$ et $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \tau_1$ passant par cette droite passent aussi par le point (P), ce qui donne les deux équations

$$\xi_0 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta_0 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \zeta_0 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \tau_0 \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0,$$
$$\xi_1 \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + \tau_1 \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0.$$

Ces équations, jointes à (1), font connaître les plans tangents : ils sont bien au nombre de $m(m-1)^2$; l'autre partie de la démonstration a déjà été donnée plus haut. Nous nous

trouvons ici en face d'un paradoxe déjà rencontré et expliqué en Géométrie plane.

On appelle *classe* d'une courbe ou de la développable à laquelle elle sert d'arête de rebroussement le nombre de plans tangents que l'on peut mener à cette développable par un *point* donné.

La développable qui a pour équations

$$(1) \qquad \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0, \qquad \psi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

la première du degré m, la seconde du degré n, est circonscrite aux surfaces $\varphi = 0$, $\psi = 0$; sa classe est mn. En effet, considérons un point

$$(2) \qquad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0;$$

le plan tangent à la développable qui passe par ce point satisfait aux équations (1) et (2) qui sont des degrés $m, n, 1$; il en résulte que le nombre des plans tangents cherchés est bien mn, comme nous l'avions annoncé.

XLIV. — Des coordonnées tétraédriques.

Soit, en coordonnées tétraédriques ordinaires,

$$(1) \qquad x\xi + y\eta + z\zeta + t\tau = 0$$

l'équation d'un plan; si l'on écrit entre les variables ξ, η, ζ, τ une relation homogène

$$(2) \qquad f(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

ce plan enveloppera une surface. Pour trouver l'équation de cette surface, il faudra, conformément aux règles établies plus haut, écrire les équations (1) et

$$\begin{vmatrix} x & y \\ \dfrac{\partial f}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} y & z \\ \dfrac{\partial f}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots$$

et éliminer entre elles ξ, η, ζ, τ; ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{z}\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial \tau}.$$

Pour effectuer l'élimination, on égalera ces rapports à une indéterminée ρ, que l'on éliminera également.

Au contraire, si l'on donnait en coordonnées tétraédriques l'équation d'une surface

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

on exprimerait que le plan (1) lui est tangent en éliminant x, y, z, t entre cette équation (1) et les équations suivantes

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\zeta}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{\tau}\frac{\partial f}{\partial t},$$

ainsi qu'on l'a vu plus haut, ce qui établit immédiatement une grande analogie entre les deux problèmes.

L'équation (2) pourra donc être regardée comme une équation, en coordonnées tétraédriques tangentielles, de la surface enveloppe du plan (1). Nous ne recommencerons pas ici une théorie déjà faite à propos des coordonnées ordinaires; nous nous bornerons à énoncer quelques propositions :

L'équation tangentielle d'une surface s'obtient en exprimant que le plan (1) *est tangent à la surface.*

Ainsi l'équation tangentielle de la surface $\sum A_{ij}x_ix_j = 0$, où $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = t$, est

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & \xi \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & \eta \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & \zeta \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & \tau \\ \xi & \eta & \zeta & \tau & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Au contraire, l'équation tétraédrique ordinaire de la surface enveloppe $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j = 0$ s'obtiendrait en remplaçant dans le déterminant précédent A par a et ξ, η, ζ, τ par x, y, z, t.

Deux équations simultanées représentent une surface développable.

Une équation du premier degré représente un point.

Deux équations du premier degré représentent une droite, etc.

On peut donner une interprétation géométrique assez simple des nouvelles variables ξ, η, ζ, τ.

Observons tout d'abord que, si l'équation d'un point est

$$a\xi + b\eta + c\zeta + d\tau = 0,$$

ses coordonnées tétraédriques ordinaires s'obtiendront en portant la valeur de τ tirée de là dans l'équation (1), ce qui donne

$$\xi(at - dx) + \eta(bt - dy) + \zeta(ct - dz) = 0;$$

en égalant à zéro les coefficients de ξ, η, ζ, on a

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{d}.$$

Ainsi, dans l'équation tangentielle du point, les coefficients sont proportionnels à ses coordonnées tétraédriques, de même que dans l'équation du plan ses coefficients sont proportionnels à ses coordonnées tangentielles tétraédriques.

Supposons que les faces du tétraèdre de référence aient respectivement pour équations

$$\begin{aligned} x &= \alpha_x X + \beta_x Y + \gamma_x Z - \delta_x = 0, \\ y &= \alpha_y X + \beta_y Y + \gamma_y Z - \delta_y = 0, \\ z &= \alpha_z X + \beta_z Y + \gamma_z Z - \delta_z = 0, \\ t &= \alpha_t X + \beta_t Y + \gamma_t Z - \delta_t = 0; \end{aligned}$$

le plan (1) aura pour équation, en coordonnées ordinaires,

$$X(\alpha_x\xi + \alpha_y\eta + \alpha_z\zeta + \alpha_t\tau) + Y(\beta_x\xi + \beta_y\eta + \beta_z\zeta + \beta_t\tau) + \ldots = 0.$$

Posons

$$\begin{aligned} &(\alpha_x\xi + \alpha_y\eta + \alpha_z\zeta + \alpha_t\tau)^2 \\ &\quad + (\beta_x\xi + \beta_y\eta + \beta_z\zeta + \beta_t\tau)^2 + (\gamma_x\xi + \gamma_y\eta + \gamma_z\zeta + \gamma_t\tau)^2 = G^2; \end{aligned}$$

désignons enfin par V le volume du tétraèdre de référence et par a, b, c, d ses faces; ses hauteurs seront

$$\frac{V}{3a}, \quad \frac{V}{3b}, \quad \frac{V}{3c}, \quad \frac{V}{3d},$$

ce seront les x, y, z et t des sommets. Ceci posé, la distance du sommet $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ au plan (1) sera donnée par la formule

$$p_x = \frac{V}{3a}\frac{\xi}{G};$$

les distances p_y, p_z, p_t des autres sommets au même plan seront données par les formules

$$p_y = \frac{V}{3b}\frac{\eta}{G}, \qquad p_z = \frac{V}{3c}\frac{\zeta}{G}, \qquad p_t = \frac{V}{3d}\frac{\tau}{G};$$

on tire de là

$$\xi : ap_x = \eta : bp_y = \zeta : cp_z = \tau : dp_t.$$

Les coordonnées ξ, η, ζ, τ sont donc proportionnelles aux distances du plan (1) aux sommets du tétraèdre et aux faces de ce tétraèdre; en sorte que, si l'on considérait le plan

$$(4) \qquad ap_x x + bp_y y + cp_z z + dp_t t = 0,$$

p_x, p_y, p_z, p_t seraient les distances de ce plan aux sommets du tétraèdre de référence et l'équation tangentielle

$$\varphi(p_x, p_y, p_z, p_t) = 0$$

serait une relation entre les distances aux sommets du triangle de référence d'une tangente à la surface qu'elle représente.

XLV. — Remarques au sujet des coordonnées tangentielles.

Nous ferons une remarque sur les coordonnées tangentielles dans l'espace : *les coordonnées d'un point et d'un plan sont des variables contragrédientes.* Il en résulte que, les équations ordinaires et tangentielles d'une surface étant $f = 0$ et $\varphi = 0$, f et φ sont des contrevariants.

Si f est du second degré, φ sera son adjointe; car la substitution linéaire effectuée sur f, telle que

$$\xi = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \zeta = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \tau = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t},$$

fournit précisément la fonction φ.

Il est facile de voir que l'équation tangentielle d'une surface représente, en coordonnées ordinaires, la transformée par polaires réciproques de cette surface par rapport à la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Les coordonnées du pôle du plan tangent

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + T\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

sont données par ces formules

$$\xi : \frac{\partial f}{\partial x} = \eta : \frac{\partial f}{\partial y} = \zeta : \frac{\partial f}{\partial z} = \tau : \frac{\partial f}{\partial t},$$

obtenues en identifiant l'équation du plan tangent avec le plan polaire de ξ, η, ζ, τ par rapport à la sphère, soit

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta + T\tau = 0.$$

EXERCICES ET NOTES.

1. Circonscrire à une sphère un conoïde d'axe donné et trouver la projection de la courbe de contact sur le plan directeur du conoïde. Étudier spécialement le cas où le conoïde est droit.

2. Circonscrire à une surface du second degré une surface de révolution d'axe donné; montrer que la courbe de contact est une biquadratique gauche (ou une de ses variétés).

3. Montrer que toute courbe gauche du troisième degré peut être représentée par des équations de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{u}{\theta}, \quad y = \frac{v}{\theta}, \quad z = \frac{w}{\theta},$$

u, v, w, θ désignant des polynômes du troisième degré en t.

Trouver l'équation de la développable, lieu des tangentes à cette courbe.

Réciproquement, les équations (1) représentent une courbe gauche du troisième ordre. Une telle courbe peut toujours être placée sur deux surfaces du second degré ayant une génératrice commune.

4. Trouver la surface qui, par rapport à un point donné, admet pour podaire une surface donnée S (cas où S est un plan, une sphère).

5. $F(s_1, s_2, s_3, \ldots) = 0$ étant l'équation d'une surface, $s_1, s_2, \ldots$ désignant les premiers membres d'équations de sphères, mener le plan tangent à cette surface.

6. On fait tourner la courbe $y = 0$, $x = \sin z$ autour de l'axe des z; elle engendre une surface de révolution R. Prouver que, si l'on éclaire cette surface R par des rayons lumineux parallèles et à 45° sur l'axe des z, l'ombre propre se projettera sur le plan des xy suivant deux cercles. L'ombre portée sur le plan des xy est une cycloïde.

(DUNESME.)

7. Si l'on considère la surface de révolution engendrée par une conique située dans le plan des zx ayant ses axes parallèles à l'axe des x et à l'axe des z, tournant autour de l'axe des z, cette surface, éclairée par des rayons parallèles, aura pour courbe d'ombre propre une ligne qui, projetée sur le plan des xy, fournira une conchoïde de conique. — Trouver la courbe d'ombre portée sur le plan horizontal.

(DUNESME.)

8. La surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

est de révolution, trouver et étudier le méridien.

9. Trouver la condition pour que l'équation générale du troisième degré rendue homogène représente un cône.

10. Toute surface de révolution touchée par un cône ou un cylindre suivant une courbe plane est du second degré. (DE LA GOURNERIE, *Journal de l'École Polytechnique;* 1858.)

11. Trouver l'équation de l'enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une hélice. (L'hélice a pour équations $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$; a, b désignant des constantes et φ un paramètre variable.) La surface en question est la *vis Saint-Gilles*. Trouver la courbe d'ombre propre ou d'ombre portée de la vis Saint-Gilles sur l'un des plans de coordonnées.

12. Trouver l'enveloppe d'un plan mobile qui détache dans un trièdre trirectangle un tétraèdre de volume constant.

13. Trouver l'enveloppe (imaginaire) d'une série de surfaces du second degré homofocales.

14. Trouver l'enveloppe d'une série d'ellipsoïdes ayant même centre, même direction d'axes et même volume.

15. Par un point de l'espace, on mène des plans parallèles aux plans tangents du cône asymptote d'une surface du second ordre; ces plans coupent la surface suivant des paraboles; ces paraboles ont-elles une enveloppe?

16. Quelle est l'équation générale des surfaces développables du troisième degré.

17. L'arête de rebroussement d'une surface développable étant de degré m, quel est le degré de cette surface?

18. L'équation de la développable circonscrite à deux surfaces du second ordre a été discutée avec soin par M. Painvin (*voir* son *Traité* lithographié *de Géométrie analytique*).

19. La transformée par rayons vecteurs réciproques d'une surface de révolution est aussi la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cône.

20. Soient p, q, r, ... les normales communes à un plan mobile et à des surfaces fixes P, Q, R, ... Si l'on pose

$$f(p, q, r, \ldots) = 0,$$

ce plan enveloppera une surface; pour avoir le point où ce plan touche son enveloppe, il suffit de chercher le centre de gravité de masses $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, \ldots$ placées aux pieds des normales $p, q, r, \ldots$ sur le plan mobile.

21. Trouver le plus court chemin d'une courbe à une autre, d'une surface à une autre, ou d'une courbe à une surface.

22. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre en rencontrant des courbes ou des surfaces données.

23. Étant données plusieurs surfaces, on demande de trouver un point tel que la somme des carrés de ses distances normales aux sur-

faces soit un minimum (ce point est le centre de gravité des pieds des normales que l'on peut mener par ces points aux surfaces).

24. Le nombre de normales que l'on peut mener d'un point à une courbe de degré m est $m^2(2m-1)$.

25. Le nombre de plans normaux que l'on peut mener d'un point à une courbe d'ordre m est $m^2(2m-1)$.

CHAPITRE V.

DES QUESTIONS QUI DÉPENDENT D'INFINIMENT PETITS D'ORDRE SUPÉRIEUR.

I. — Longueur d'un arc de courbe gauche.

La définition que nous avons donnée de la longueur d'un arc de courbe, en Géométrie plane, s'applique aux courbes gauches; ainsi la longueur d'un arc de courbe gauche est la limite vers laquelle tend le polygone inscrit dont les côtés deviennent de plus en plus petits, leur nombre croissant indéfiniment.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'arc en question; la longueur L d'un polygone inscrit peut être représentée par l'expression

$$L = \sum \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

ou

$$L = \sum \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}$$

ou encore

$$L = \sum \Delta x (\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \varepsilon),$$

y' et z' désignant les dérivées de y et z, et ε désignant un infiniment petit. Si l'on construit alors la courbe plane dont l'abscisse est x et l'ordonnée

$$\sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

l'aire de cette courbe sera la limite de

$$\sum \Delta x \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

et cette limite existe; la limite de $\sum \varepsilon \Delta x$ est nulle, car c'est l'aire d'une courbe dont l'ordonnée est ε, et, par suite,

$$\lim \mathrm{L} = \lim \sum \Delta x \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}.$$

Nous désignerons par s la limite de L, c'est-à-dire, par définition, la longueur de l'arc. La différentielle de l'arc, ou ds, sera la différentielle de l'aire de notre courbe auxiliaire, différentielle égale à son ordonnée multipliée par dx; on aura donc

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

ou, en élevant au carré,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Cette expression de la différentielle de l'arc la fait entrer utilement dans diverses formules : ainsi, par exemple, les cosinus des angles que la tangente à une courbe fait avec les axes sont proportionnels à dx, dy, dz et, par suite, égaux à

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \quad \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

c'est-à-dire à $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$; ainsi dx, dy, dz sont les projections de la longueur ds portée sur la tangente et non pas, comme on dit quelquefois, les projections de la *corde* joignant deux points voisins.

II. — Du plan osculateur.

Par un point d'une courbe, on peut mener une infinité de plans touchant cette courbe, c'est-à-dire passant par deux points infiniment voisins, mais il en est un parmi eux qui

doit surtout attirer notre attention, c'est celui qui passe par trois points infiniment voisins; on lui a donné le nom de *plan osculateur*.

Ainsi, le plan osculateur d'une courbe en un point est la limite du plan qui passe par ce point et deux autres points de la courbe venant se confondre avec le premier.

Pour trouver l'équation du plan osculateur d'une courbe au point x, y, z, on remarquera que, le plan devant passer par le point x, y, z, son équation sera de la forme

$$(1) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

A, B, C désignant des coefficients à déterminer. Exprimons qu'il passe aussi par les points $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ et $x+2\Delta x+\Delta^2 x$, $y+2\Delta y+\Delta^2 y$, $z+2\Delta z+\Delta^2 z$, infiniment voisins du premier; nous aurons

$$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z=0,$$

$$A(2\Delta x+\Delta^2 x)+B(2\Delta y+\Delta^2 y)+C(2\Delta z+\Delta^2 z)=0;$$

la dernière formule peut être remplacée par

$$A\Delta^2 x+B\Delta^2 y+C\Delta^2 z=0$$

et, si alors on passe aux limites (t. I, p. 101), on aura pour déterminer A, B, C les équations

$$(2) \qquad A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,$$

$$(3) \qquad A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.$$

Si, entre les équations (2), (3) et l'équation (1), on élimine A, B, C, on aura l'équation du plan osculateur

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}=0$$

ou

$$(X-x)(dy\,d^2z-d^2y\,dz)+(Y-y)(dz\,d^2x-d^2z\,dx)$$
$$+(Z-z)(dx\,d^2y-d^2x\,dy)=0.$$

Le plan osculateur d'une courbe, au point M *de cette*

courbe, est un plan passant en M *et situé à une distance du point* M' *infiniment voisin de* M *pris sur la courbe, qui est infiniment petite du troisième ordre.*

En effet, la distance du point $x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$ au plan représenté par l'équation (1) est

$$\frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Si l'on veut exprimer que cette quantité est du troisième ordre, il faut la développer par la formule de Taylor, en observant que $\Delta x = dx + \frac{1}{2}d^2x + \ldots$, et égaler alors à zéro les termes contenant les infiniment petits du premier et du second ordre. On a précisément ainsi les formules (2) et (3). Nous généraliserons plus tard cette proposition.

Le plan osculateur est aussi la limite d'un plan passant par une tangente parallèlement à la tangente infiniment voisine.

En effet, l'équation d'un plan passant par le point x, y, z est

$$(1) \qquad A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0;$$

s'il passe par la tangente au point x, y, z, on a

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0;$$

s'il est parallèle à la tangente voisine, dont les coefficients directeurs sont $dx+d^2x$, $dy+d^2y$, $dz+d^2z$, on a

$$A(dx+d^2x)+B(dy+d^2y)+C(dz+d^2z)=0;$$

ces équations reviennent à (1), (2) et (3) : donc, etc.

Disons enfin que *le plan osculateur en x, y, z est la limite d'un plan passant par trois points variables de la courbe venant se confondre tous trois en x, y, z.*

En effet, exprimant que le plan

$$AX+BY+CZ+D=0$$

passe par le point

$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z,$$

puis par les points

$$x+2\,\Delta x+\Delta^2 x,\quad \ldots$$

et

$$x+3\,\Delta x+3\,\Delta^2 x+\Delta^3 x,\quad \ldots,$$

on a

$$\begin{aligned}
&A(X-x-\Delta x)+B(Y-y-\Delta y)+C(Z-z-\Delta z)+D=0,\\
&A(X-x-2\,\Delta x-\Delta^2 x)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0,\\
&A(X-x-3\,\Delta x-3\,\Delta^2 x-\Delta^3 x)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0.
\end{aligned}$$

En combinant ces équations et en négligeant des termes d'ordre supérieur, on a

$$\begin{aligned}
&A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,\\
&A\,\Delta x+B\,\Delta y+C\,\Delta z=0,\\
&A\,\Delta^2 x+B\,\Delta^2 y+C\,\Delta^2 z=0,
\end{aligned}$$

ce qui, en passant aux limites, fournit les équations

$$\begin{aligned}
&A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,\\
&A\,dx+B\,dy+C\,dz=0,\\
&A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0.
\end{aligned}$$

L'élimination de A, B, C entre ces équations donne l'équation du plan osculateur : donc, etc. C. Q. F. D.

Théorème. — *L'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins est une tangente à la courbe.*

En effet, soit

$$(4)\qquad P=0$$

l'équation du plan osculateur au point (x, y, z); l'équation du plan osculateur au point infiniment voisin,

$$x+dx,\quad y+dy,\quad z+dz,$$

s'obtiendra en changeant dans l'équation précédente x en $x + dx$, y en $y + dy$, et z en $z + dz$; cette équation sera donc

$$(5) \qquad P + dP = 0.$$

Cette équation et (4) représentent l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins.

On peut remplacer d'ailleurs l'équation (5) par $dP = 0$, en sorte que l'intersection cherchée peut être représentée par les deux équations

$$(6) \qquad \begin{gathered} A(X-x) + B(Y-y)\, C(Z-z) = 0, \\ dA(X-x) + dB(Y-y) + dC(Z-z) - (A\,dx + B\,dy + C\,dz) = 0; \end{gathered}$$

en vertu de (2), cette dernière formule se réduit à

$$dA(X-x) + dB(Y-y) + dC(Z-z) = 0;$$

combinée avec (6), elle donne

$$(7) \qquad \frac{X-x}{B\,dC - C\,dB} = \frac{Y-y}{C\,dA - A\,dC} = \frac{Z-z}{A\,dB - B\,dA}.$$

Ce sont encore les équations de l'intersection de deux plans osculateurs infiniment voisins; mais, en posant

$$\begin{aligned} \Delta = {} & (dy\,d^2z - d^2y\,dz)\,d^3x \\ & + (dz\,d^2x - d^2z\,dx)\,d^3y + (dx\,d^2y - d^2x\,dy)\,d^3z, \end{aligned}$$

on a

$$B\,dC - C\,dB = dx.\Delta, \qquad C\,dA - A\,dC = dy.\Delta,$$
$$A\,dB - B\,dA = dz.\Delta.$$

Ces formules (7) peuvent donc s'écrire, en multipliant par Δ,

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz};$$

ce sont les équations de la tangente : donc, etc. C. Q. F. D.

Il résulte de là que *l'enveloppe des plans osculateurs d'une courbe gauche est le lieu de ses tangentes.*

Par suite :

Le lieu des tangentes à une courbe gauche est une

surface développable, dont le plan tangent est osculateur à l'arête de rebroussement.

III. — Projections cylindriques et coniques des courbes gauches.

Rapportons une courbe gauche à son plan osculateur pris pour plan des xy; nous prendrons pour axe des x la tangente, pour axe des y la normale tracée dans le plan osculateur qu'on appelle la *normale principale;* l'axe des z sera alors la normale perpendiculaire au plan osculateur ou la *binormale.*

L'équation du plan osculateur devra se réduire à

$$Z = 0;$$

on devra donc avoir, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$$d^2z\,dy - d^2y\,dz = 0, \tag{1}$$

$$d^2x\,dz - d^2z\,dx = 0; \tag{2}$$

en égalant à zéro les coefficients de X et Y dans l'équation générale du plan osculateur, on devra avoir en outre

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 0, \quad \frac{dz}{ds} = 0, \tag{3}$$

puisque l'axe des x est la tangente, et que les trois quantités précédentes sont les cosinus directeurs de cette tangente. Les équations (1) et (2) se réduisent alors à $0 = 0$ et $d^2z = 0$.

Supposons que l'on prenne pour variable l'arc s compté à partir de l'origine des coordonnées. En appelant x', y', z', x'', y'', z'', ... les dérivées successives de x, y, z pour $s = 0$, on a, par la formule de Taylor, et en tenant compte des relations $\frac{dx}{ds} = 1$, $\frac{dy}{ds} = 0$, $\frac{dz}{ds} = 0$, $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$,

$$x = s + \frac{x''}{2}s^2 + \ldots,$$

$$y = \frac{y''}{2}s^2 + \ldots,$$

$$z = \frac{z'''}{6}s^3 + \ldots.$$

On conclut de ces formules que les rapports $\frac{y}{x^2}$, $\frac{z}{x^3}$, $\frac{y^3}{z^2}$ sont finis pour $s = 0$; donc on peut écrire

$$y = ax^2 + \omega, \qquad z = bx^3 + \omega', \qquad z^2 = cy^3 + \omega'',$$

a, b, c désignant des constantes et ω, ω', ω'' des quantités infiniment petites d'ordre supérieur.

Il en résulte que, si x est assez petit, ces équations, qui sont celles de la projection de la courbe sur les plans coordonnés, sont sensiblement celles des courbes

$$y = ax^2, \qquad z = bx^3, \qquad z^2 = cy^3.$$

Ainsi, *projetée : 1° sur son plan osculateur, la courbe ne présente aucune particularité; 2° sur le plan normal, elle présente un point de rebroussement ordinaire et 3° sur le plan tangent passant par la binormale, une inflexion.*

Ces résultats peuvent être généralisés :

Supposons que l'on regarde une courbe gauche en plaçant l'œil sur la binormale, cette courbe ne présentera aucune particularité; si l'œil est placé sur la tangente, la courbe présente au point que l'on considère un rebroussement de première espèce; enfin, en plaçant l'œil sur la normale principale, la courbe présente un point d'inflexion; en effet, dans le voisinage du point considéré, la perspective de la courbe se confond sensiblement avec une projection orthogonale.

IV. — Du contact des courbes gauches.

Deux courbes gauches passant au point M ont en ce point un contact d'ordre n si, considérant une sécante PP′ commune à ces deux courbes, menée dans le voisinage du point M, la portion PP′ de sécante comprise entre les deux courbes est d'ordre $n+1$ par rapport aux distances MP ou MP′.

Supposer MP et MP′ de même ordre, c'est supposer que PP′ n'est pas parallèle à la tangente en M à l'une des deux courbes. D'ailleurs, en répétant les raisonnements faits en Géométrie

plane, on démontrerait que l'ordre de PP′ ne dépend pas de son orientation.

Pour trouver les conditions du contact d'ordre n de deux courbes passant au point M, désignons par x, y, z ou par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point M suivant qu'on le considérera comme appartenant à la première ou à la seconde courbe. Les coordonnées du point P voisin de M sur la première courbe seront $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, et les coordonnées du point P′ voisin de M sur la seconde courbe seront $x_1+\Delta x_1$, $y_1+\Delta y_1$, $z_1+\Delta z_1$. Pour qu'il y ait contact d'ordre M, il faudra que PP′, ou ses projections $\Delta x-\Delta x_1$, $\Delta y-\Delta y_1$, $\Delta z-\Delta z_1$, soient d'ordre $n+1$ au moins. (L'une d'elles devra être de l'ordre $n+1$ si l'on veut que le contact soit précisément d'ordre n.)

Mais, pour que ces conclusions soient exactes, il faut que la variable indépendante dont dépend la position des points P et P′ soit telle que PP′ ne soit pas parallèle à la tangente à l'une des deux courbes. On pourra, par exemple, prendre $x=x_1$ pour variable indépendante; les points P et P′ s'obtiendront alors en coupant les deux courbes par un plan parallèle au plan des yz.

Ces restrictions une fois posées, si l'on observe que, en vertu de la formule de Taylor,

$$\Delta x-\Delta x_1 = dx-dx_1+\tfrac{1}{2}(d^2x-d^2x_1)+\ldots,$$
$$\Delta y-\Delta y_1 = dy-dy_1+\tfrac{1}{2}(d^2y-d^2y_1)+\ldots,$$
$$\Delta z-\Delta z_1 = dz-dz_1+\tfrac{1}{2}(d^2z-d^2z_1)+\ldots,$$

on voit que les conditions de contact d'ordre n sont

$$\begin{array}{llll} dx-dx_1=0, & d^2x-d^2x_1=0, & \ldots, & d^nx-d^nx_1=0,\\ dy-dy_1=0, & d^2y-d^2y_1=0, & \ldots, & d^ny-d^ny_1=0,\\ dz-dz_1=0, & d^2z-d^2z_1=0, & \ldots, & d^nz-d^nz_1=0. \end{array}$$

Quand on prend $x=x_1$ pour variable indépendante, on a $dx=0$, $dx_1=0$, $\ldots$, $d^nx=0$, $d^nx_1=0$ et les conditions écrites sur la première ligne sont satisfaites d'elles-mêmes : donc il faut $2n$ conditions pour assurer le contact d'ordre n.

Dans la pratique, pour exprimer que deux courbes ont un contact d'ordre n, on différentie les équations de l'une des courbes et l'on y remplace les différentielles de x, y, z par les différentielles déduites des équations de l'autre courbe. Il conviendra, en général, de prendre pour variable indépendante l'une des coordonnées x, y, z, ou l'arc s que l'on prendra le même dans les deux courbes. (*Voir* les remarques faites en Géométrie plane.)

Théorème I. — *Deux courbes ont un contact d'ordre n quand leurs projections sur un plan quelconque ont un contact d'ordre n, et vice versa.*

En effet, la distance PP′ considérée tout à l'heure est du même ordre que sa projection, pourvu que la projection ne s'effectue pas sur un plan normal commun aux deux courbes.

Théorème II. — *Deux courbes ont un contact d'ordre n, quand elles sont la limite de deux courbes variables se coupant en $n+1$ points confondus.*

En effet, leurs projections ont un contact d'ordre n. Il va sans dire que deux courbes qui ont un contact du premier ordre sont tangentes; car, l'angle PMP′ ayant un côté PP′ du second ordre, l'angle M sera nul à la limite; puisque

$$\frac{\sin M}{PP'} = \frac{\sin P}{MP'},$$

P étant fini par hypothèse, MP′ étant du premier ordre, M doit être nul à la limite, si PP′ est du second ordre. Ainsi MP et MP′ ont même position limite; or ces positions limites sont celles des tangentes aux courbes en M.

V. — Contact des courbes et des surfaces.

Une courbe a avec une surface un contact d'ordre n au point commun M, quand une droite PP′ voisine de M rencontre

la courbe et la surface en des points P et P', tels que PP' soit d'ordre $n+1$ par rapport à MP. En supposant que PP' ne soit à la limite ni tangent à la courbe ni tangent à la surface, on prouve que cette définition est indépendante de l'orientation de PP'.

Pour trouver les conditions du contact d'ordre n d'une courbe et d'une surface, nous supposerons que l'axe des z ne soit parallèle ni à la tangente en M à la courbe, ni au plan tangent en M à la surface. Le cylindre projetant la courbe sur le plan des xy coupe la surface suivant une courbe qui doit avoir avec la proposée un contact d'ordre n, car la distance de deux points de ces courbes comptée parallèlement à l'axe des z est d'ordre $n+1$, et réciproquement.

Soient donc

$$x = \varphi(z), \tag{1}$$

$$y = \psi(z), \tag{2}$$

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

les équations de la courbe,

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4}$$

celle de la surface; il suffira, pour assurer le contact d'ordre n, d'exprimer que la courbe représentée par

$$F = 0, \qquad f = 0$$

a un contact d'ordre n avec celle qui est représentée par

$$x = \varphi(z), \qquad y = \psi(z).$$

Pour cela, on exprimera que les valeurs de dx, dy, dz, ..., déduites des équations de la courbe proposée, sont les mêmes que celles que l'on déduirait de $F=0$ et de $f=0$; pour exprimer ces conditions, on peut différentier n fois

$$F = 0, \qquad f = 0,$$

et remplacer $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, \ldots$ par leurs valeurs tirées de $x=\varphi(z), y=\psi(z)$; mais alors $f=0$, $df=0$, ...

donnent des identités, et les conditions du contact d'ordre n sont que les équations

$$F = 0, \qquad dF = 0, \qquad \ldots, \qquad d^n F = 0$$

aient lieu quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs déduites de $x = \varphi(z)$, $y = \psi(z)$.

Théorème. — *Si une courbe variable de forme rencontre une surface en $n+1$ points, et que, eu égard à la variabilité de certains paramètres, les points en question viennent se confondre en un seul, la courbe et la surface auront un contact d'ordre n.*

En effet, si l'on projette la courbe sur la surface à l'aide de projetantes parallèles à une direction fixe, on obtiendra une courbe qui, à la limite, aura avec la proposée un contact d'ordre n, puisqu'elle a évidemment avec celle-ci $n+1$ points communs qui, à la limite, viennent se confondre en un seul situé sur la surface.

La définition que nous avons donnée plus haut du plan osculateur nous montre que ce plan a avec la courbe un contact du second ordre; car, pour obtenir son équation, nous avons exprimé que les différentielles première et seconde du premier membre de son équation étaient nulles, en supposant x, y, z tirés des équations de la courbe.

Deux courbes sont osculatrices, une courbe est osculatrice d'une surface, quand l'ordre de leur contact est aussi élevé que possible, eu égard au nombre des paramètres arbitraires que leurs équations renferment.

Ainsi, un plan renfermant trois paramètres, on pourra le faire passer par trois points donnés seulement; il ne pourra donc avoir avec une courbe un contact d'ordre supérieur au second, et, quand il aura un contact de cet ordre, il sera osculateur.

Accidentellement, deux courbes ou une surface et une courbe peuvent avoir un conctact d'ordre plus élevé qu'on ne pourrait le supposer, eu égard au nombre des paramètres

que renferment leurs équations; on dit alors qu'il y a *surosculation*. Nous avons donné des exemples de surosculation en Géométrie plane; nous en donnerons bientôt de nouveaux.

VI. — Droite osculatrice et plan osculateur d'une courbe.

Les équations d'une droite sont de la forme

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta. \tag{1}$$

Pour qu'elle ait un contact d'ordre n avec une courbe, il faut que les dx, dy, d^2x, d^2y, ... de la courbe soient égaux à ceux de la droite; on doit donc avoir

$$dx = a\,dz, \qquad dy = b\,dz, \tag{2}$$

$$d^2x = 0, \qquad d^2y = 0, \tag{3}$$

$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots;$$

les équations (1) et (2) déterminent a, b, α, β, quand on s'est donné x, y, z. La droite osculatrice d'une courbe en un point donné a donc en général un contact du premier ordre avec cette courbe, et les équations (2) montrent que c'est la tangente au point donné.

Les points où l'on a $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ sont ce qu'on peut appeler des points d'*inflexion;* le plan osculateur y est indéterminé.

L'équation du plan est de la forme

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

et contient trois paramètres; on peut donc le faire passer par trois points confondus en un seul, et alors il sera osculateur; on déterminera ses coefficients par les formules

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

En certains points, il pourra se faire qu'on ait en outre

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z = 0,$$

et alors l'élimination de A, B, C donnera

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta = 0;$$

le plan osculateur est alors surosculateur ou *stationnaire*, et la courbe se confond sensiblement avec une courbe plane dans le voisinage du point (x, y, z).

Supposons une courbe donnée par ses équations; on pourra poser $\Delta = 0$. Cette équation, jointe à celles de la courbe, déterminera un certain nombre de points où le plan osculateur sera stationnaire. Ainsi, sur toutes les courbes, en général, il existe de tels points.

Enfin il pourrait arriver que, en certains points, le plan osculateur eût un contact d'ordre encore supérieur; mais il faudrait une équation de plus pour exprimer cette circonstance. Il en résulte que les courbes ne possèdent pas, en général, de tels points.

VII. — Cercle osculateur.

Le cercle est déterminé par trois points : le cercle osculateur d'une courbe sera celui qui passera par trois points infiniment voisins de cette courbe. On peut prévoir que le plan de ce cercle sera le plan osculateur, puisqu'il passe par trois points infiniment voisins de la courbe. Vérifions cela par le calcul.

Les équations d'un cercle sont

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2.$$

Pour exprimer que ce cercle est osculateur, il faut écrire qu'il passe par le point (x, y, z) de la courbe et que ses dx, dy, dz, d^2x, ... sont les mêmes que ceux de la courbe. Pour cela, nous écrirons que les équations (1) et (2) ont lieu pour un

point de la courbe; cette condition est toute écrite si x et y sont supposés calculés en fonction de z à l'aide des équations de la courbe. Différentiant alors les formules (1) et (2), nous exprimerons qu'elles ont encore lieu quand on y remplace x, y, z, dx, dy, dz par leurs valeurs tirées des équations de la courbe, et nous différentierons ainsi jusqu'à ce que nous ayons juste assez d'équations pour déterminer les coefficients A, B, C, D, α, β, γ, R. Nous trouvons ainsi, outre les équations (1), (2) entendues comme il a été dit,

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \tag{3}$$

$$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy + (z-\gamma)dz = 0. \tag{4}$$

On peut encore écrire deux équations pour déterminer les sept coefficients auxquels se réduisent A, B, ..., R. Différentions encore et nous aurons

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0, \tag{5}$$

$$(x-\alpha)d^2x + (y-\beta)d^2y + (z-\gamma)d^2z = ds^2. \tag{6}$$

Il semble qu'il reste un coefficient indéterminé dans le résultat; mais les équations (1) et (2) représentent d'une infinité de manières le même cercle, et l'on peut supposer

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0;$$

α, β, γ seront alors les coordonnées du centre du cercle osculateur. Cette formule permet d'écrire l'équation (1) ainsi

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0 \tag{7}$$

et d'éliminer D.

Pour calculer α, β, γ et R, ce qu'il nous importe surtout de connaître, nous observerons que, si pour un moment α, β, γ sont considérés comme coordonnées courantes, l'équation (4) représente un plan normal, et l'équation (6), obtenue en différentiant (4), est l'équation d'un plan passant par l'intersection du plan normal avec le plan normal infiniment voisin; les formules (4) et (6) représentent l'axe du cercle osculateur. Ainsi, *l'axe du cercle osculateur est*

l'intersection de deux plans normaux, infiniment voisins. Les équations (3), (5), (7) sont celles du plan osculateur. Ainsi :

THÉORÈME. — *Le plan du cercle osculateur est le plan osculateur.*

En résolvant les formules (4), (6), (7) et en observant que $A = dy\,d^2z - d^2y\,dz, \ldots$, puis en posant $D^2 = A^2 + B^2 + C^2$, on trouve

$$(8)\quad x - \alpha = \frac{ds^2}{D^2}[dz(d^2x\,dz - d^2z\,dx) - dy(d^2y\,dx - d^2x\,dy)].$$

Cette formule se simplifie et donne successivement

$$x - \alpha = \frac{ds^2}{D^2}[d^2x(dy^2 + dz^2) - dx(d^2z\,dz + d^2y\,dy)],$$

$$x - \alpha = \frac{ds^2}{D^2}[d^2x(ds^2 - dx^2) - dx(ds\,d^2s - dx\,d^2x)],$$

$$(9)\quad x - \alpha = \frac{ds^3}{D^2}(d^2x\,ds - d^2s\,dx).$$

Pour calculer R, nous observerons que la formule (8) peut s'écrire

$$(x - \alpha) = \frac{ds^2}{D^2}(B\,dz - C\,dy);$$

en ajoutant cette équation avec celles qui donnent $y - \beta$, $z - \gamma$, après les avoir élevées au carré, on a

$$R^2 = \frac{ds^4}{D^4}\sum(B\,dz - C\,dy)^2$$

ou, en vertu d'une identité bien connue,

$$R^2 = \frac{ds^4}{D^4}[(A^2 + B^2 + C^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2],$$

c'est-à-dire, en observant que le second terme est nul,

$$R^2 = \frac{ds^4}{D^4}D^2\,ds^2$$

ou, réductions faites,

$$(10)\qquad R = \frac{ds^3}{D}$$

ou enfin

$$(10\ bis)\qquad R = \frac{ds^3}{[(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Le cercle osculateur étant tangent à la courbe, le rayon de courbure du point de contact est dirigé suivant une normale à la courbe ; cette normale, située dans le plan osculateur, porte le nom de *normale principale*. Nous la supposerons dirigée de la courbe vers le centre du cercle osculateur; ses cosinus directeurs sont alors $\frac{x-\alpha}{R}$, $\frac{y-\beta}{R}$, $\frac{z-\gamma}{R}$, c'est-à-dire

$$\frac{ds^3}{RD^2}(d^2x\,ds - d^2s\,dx),\quad \ldots,$$

c'est-à-dire, en vertu de (10),

$$(11)\qquad R\frac{d^2x\,ds - d^2s\,dx}{ds^3},\quad R\frac{d^2y\,ds - d^2s\,dy}{ds^3},\quad R\frac{d^2z\,ds - d^2s\,dz}{ds^3}.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, quand l'arc est variable indépendante, les cosinus directeurs de la normale principale se réduisent à

$$R\frac{d^2x}{ds^2},\quad R\frac{d^2y}{ds^2},\quad R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

En écrivant que la somme de leurs carrés est l'unité, on trouve

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2.$$

VIII. — Des deux courbures des courbes gauches.

Dans la Géométrie à trois dimensions, comme dans la Géométrie à deux dimensions, il est naturel de mesurer la courbure d'une courbe par l'inverse du rayon du cercle oscu-

lateur. On arrive aussi d'une autre manière à la mesure de la courbure.

Si, comme en Géométrie plane, nous appelons *angle de contingence* l'angle de deux tangentes voisines; si nous appelons $d\varepsilon$ cet angle; si nous désignons en outre par ds l'arc correspondant, $\frac{d\varepsilon}{ds}$ sera ce que nous appellerons la *courbure*.

Mais, indépendamment de cette courbure, les courbes gauches en possèdent une autre (qui fait, par exemple, que l'hélice a un pas); cette courbure ou torsion est produite par le déplacement du plan osculateur. Nous la mesurerons à l'aide des considérations suivantes.

L'angle que deux plans osculateurs infiniment voisins font entre eux au point M d'une courbe est appelé *angle de torsion*.

En désignant par $d\omega$ l'angle de torsion, ds l'arc correspondant, $\frac{d\omega}{ds}$ est ce que l'on appelle la *torsion* en M.

Pour calculer la courbure et la torsion, nous ferons usage d'un lemme que nous allons démontrer.

Lemme. — Soient α, β, γ et α_1, β_1, γ_1 les coefficients directeurs de deux droites, θ leur angle; on a

$$(1) \qquad \sin^2\theta = \frac{(\beta\gamma_1 - \gamma\beta_1)^2 + (\gamma\alpha_1 - \alpha\gamma_1)^2 + (\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)}.$$

Supposons maintenant que α_1, β_1, γ_1 soient ce que deviennent α, β, γ quand on passe de la droite α, β, γ supposée mobile à sa position infiniment voisine; on aura

$$\alpha_1 = \alpha + d\alpha, \qquad \beta_1 = \beta + d\beta, \qquad \gamma_1 = \gamma + d\gamma, \qquad \sin^2\theta = \theta^2,$$

et la formule (1) donnera

$$(1) \qquad \theta^2 = \frac{(\beta\, d\gamma - \gamma\, d\beta)^2 + (\gamma\, d\alpha - \alpha\, d\gamma)^2 + (\alpha\, d\beta - \beta\, d\alpha)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}.$$

Telle est l'expression que nous voulions obtenir de l'angle de deux droites infiniment voisines.

Applications. — Supposons d'abord que α, β, γ représentent les coefficients directeurs de la tangente à une courbe au point (x, y, z), et soit ds l'élément d'arc de cette courbe; on aura $\alpha = dx$, $\beta = dy$, $\gamma = dz$, et $\theta = d\varepsilon$ sera l'angle de contingence; il viendra alors

$$d\varepsilon^2 = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dy\,d^2x - dx\,d^2y)^2}{ds^4};$$

en divisant par ds^2 et en appelant $\frac{1}{R}$ la courbure, on aura

$$(2)\qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dy\,d^2x - dx\,d^2y)^2}{ds^6}.$$

Nous appellerons R le *rayon de courbure;* nous pouvons observer qu'en désignant par A, B, C les coefficients du plan osculateur, on a

$$(2\,bis)\qquad \frac{1}{R^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{ds^6};$$

la formule (2) peut encore s'écrire

$$(2\,ter)\qquad \frac{1}{R^2} = \frac{(dx^2 + dy^2 + dz^2)(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 2(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z^2)}{ds^6}.$$

En observant que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ et qu'en différentiant on a $dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = ds\,d^2s$, la formule (2 *ter*) devient

$$\frac{1}{R^2} = \frac{ds^2(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) - 2ds\,d^2s}{ds^6};$$

si donc on prend s pour variable indépendante, on a $d^2s = 0$, et

$$(3)\qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2,$$

formule souvent utile, et qui montre, ainsi que (2), que le rayon de courbure est égal au rayon du cercle osculateur (*voir* p. 359).

Supposons en second lieu que l'on prenne

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha = A = d^2y\,dz - d^2z\,dy, \\ \beta = B = d^2z\,dx - d^2x\,dz, \\ \gamma = C = d^2x\,dy - d^2y\,dx, \end{cases}$$

A, B, C désignant, comme plus haut, les coefficients directeurs du plan osculateur; dans la formule (1), θ désignera l'angle $d\omega$ de deux plans osculateurs voisins ou, si l'on veut, l'angle de torsion, et l'on aura

$$(5)\quad d\omega^2 = \frac{(B\,dC - C\,dB)^2 + (C\,dA - A\,dC)^2 + (A\,dB - B\,dA)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix},$$

Δ est ce que l'on appelle le *déterminant* de la courbe. Si l'on effectue le développement de $B\,dC - C\,dB$, on trouve, en faisant usage des formules (4),

$$\begin{aligned} B\,dC - C\,dB &= \Delta\,dx, \\ C\,dA - A\,dC &= \Delta\,dy, \\ A\,dB - B\,dA &= \Delta\,dz. \end{aligned}$$

L'équation (5) donne alors

$$d\omega^2 = \frac{\Delta^2\,ds^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

et, en appelant $\frac{1}{T}$ la torsion $\frac{d\omega}{ds}$,

$$\frac{1}{T^2} = \frac{\Delta^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

puis, à l'aide de (2 *bis*), on a

$$\frac{1}{T^2} = \frac{R^4\Delta^2}{ds^{12}}$$

et

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{R^2 \Delta}{ds^6}; \tag{6}$$

T s'appelle le *rayon de torsion*.

L'expression de Δ et par suite celle de T prennent des formes remarquables quand on choisit l'arc s pour variable indépendante. On a

$$\frac{\Delta}{ds^6} = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix},$$

en désignant par $x', y', z', \ldots$ les dérivées de x, y, z relatives à s; on en conclut, en élevant au càrré,

$$\left(\frac{\Delta}{ds^6}\right)^2 = \begin{vmatrix} \sum x'^2 & \sum x'x'' & \sum x'x''' \\ \sum x'x'' & \sum x''^2 & \sum x''x''' \\ \sum x'x''' & \sum x''x''' & \sum x'''^2 \end{vmatrix}; \tag{7}$$

or, si l'on différentie les formules $\sum x'^2 = 1$ et $\sum x''^2 = \frac{1}{R^2}$, dont la seconde est identique à (3), on a

$$\sum x'x'' = 0 \quad \text{et} \quad \sum x'x''' = -\sum x''^2 = -\frac{1}{R^2};$$

on a aussi

$$\sum x''x''' = \frac{1}{R}\,\frac{d\frac{1}{R}}{ds}.$$

La formule (7) devient alors

$$\left(\frac{\Delta}{ds^5}\right)^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{R^2} \\ 0 & +\frac{1}{R^2} & \frac{1}{R}\left(\frac{d\frac{1}{R}}{ds}\right) \\ -\frac{1}{R^2} & \frac{1}{R}\left(\frac{d\frac{1}{R}}{ds}\right) & \sum x'''^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left(\frac{\Delta}{ds^6}\right)^2 = \frac{1}{R^2}\sum x'''^2 - \frac{1}{R^6} - \frac{1}{R^2}\left(\frac{d\frac{1}{R}}{ds}\right)^2;$$

(6) devient par suite

$$\frac{1}{T^2} = R^2\sum x'''^2 - \frac{1}{R^2} - R^2\left(\frac{d\frac{1}{R}}{ds}\right)^2.$$

VIII. — Discussion des formules relatives à la courbure.

Le rayon de courbure est une fonction de x, y, z, ou plutôt de l'une quelconque de ces variables; il ne peut être qu'accidentellement nul ou infini. En effet, si l'on suppose R toujours infini ou $\frac{1}{R}$ toujours nul, les coefficients A, B, C du plan osculateur seront toujours nuls, et, dans ce cas, nous avons vu (p. 358) que la courbe se réduit à une droite. R ne saurait être toujours nul, sans quoi $\frac{1}{R^2}$ serait toujours infini et

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

aussi, ce qui ne peut avoir lieu. La torsion étant exprimée par la formule $R^2\frac{\Delta}{ds^6}$ ne peut être constamment nulle que si $\Delta = 0$; or on a, en prenant z pour variable indépendante,

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & 0 \\ d^3x & d^3y & 0 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\Delta = (d^2x\,d^3y - d^3x\,d^2y)\,dz.$$

Si l'on pose $\Delta = 0$, dz étant différent de zéro, on a

$$d^2x\,d^3y - d^3x\,d^2y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^3y}{d^2y} - \frac{d^3x}{d^2x} = 0$$

ou, en désignant par c une constante,

$$\log d^2y - \log d^2x = \log c,$$

ce que l'on vérifie en remarquant que la différentielle du premier membre de cette formule reproduit le premier membre de la formule précédente. On peut écrire cette formule ainsi

$$\frac{d^2y}{d^2x} = c$$

ou

$$d^2y - c\,d^2x = 0;$$

en appelant c' une nouvelle constante, on trouve

$$dy - c\,dx = c'\,dz,$$

et, en appelant c'' une troisième constante,

$$y - cx - c'z = c'';$$

c'est l'équation d'un plan : donc les courbes planes ont seules une torsion nulle.

Remarque. — Ainsi, pour exprimer qu'une courbe est plane, on pourra écrire que son déterminant est nul.

IX. — Évaluation de quelques infiniment petits à l'aide des quantités R, T, Δ.

Distance d'un point d'une courbe à la tangente menée par le point voisin. — L'équation de la tangente étant

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

la distance h du point $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ à cette droite est donnée par la formule

$$h = \frac{\sqrt{(\Delta z\,dy - \Delta y\,dz)^2 + (\Delta x\,dz - \Delta z\,dx)^2 + (\Delta y\,dx - \Delta x\,dy)^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Remplaçons Δx, Δy, Δz par

$$dx + \frac{d^2x}{2} + \frac{d^3x}{6} + \ldots, \qquad dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \ldots, \qquad dz + \tfrac{1}{2}d^2z + \ldots;$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur, nous aurons

$$h = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(d^2z\,dy - d^2y\,dz)^2 + \ldots}{ds^2}},$$

c'est-à-dire (p. 362)

$$h = \tfrac{1}{2}\frac{ds^2}{R}.$$

Cette formule est exacte aux termes du troisième ordre près, et l'on vérifie une fois de plus que la quantité h est du second ordre.

Distance d'un point d'une courbe au plan osculateur mené par le point infiniment voisin. — L'équation du plan osculateur en x, y, z est

$$(X - x)(d^2y\,dz - d^2z\,dy) + \ldots = 0$$

ou

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0.$$

La distance du point $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ à ce plan est donnée par la formule

$$k = \frac{A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Or on a vu que (p. 348)

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

Si donc on remplace Δx par $dx + \frac{1}{2}d^2x + \frac{1}{6}d^3x + \ldots$, on aura, en vertu des formules précédentes,

$$k = \frac{A\,d^3x + B\,d^3y + C\,d^3z}{6\sqrt{A^3 + B^3 + C^3}};$$

si l'on remplace alors A, B, C par leurs valeurs

$$d^2y\,dz - d^2z\,dy,\quad d^2z\,dx - d^2x\,dz,\quad d^2x\,dy - d^2y\,dx,$$

on trouve, en se rappelant les expressions de Δ, $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{T}$ données au paragraphe précédent,

$$k = \frac{\Delta}{6}\frac{R}{ds^3} = \frac{ds^3}{6TR};$$

k est donc bien du troisième ordre, comme nous l'avons déjà observé, et nous avons une double expression de cette quantité, exacte aux termes du quatrième ordre près.

Différence entre un arc et sa corde. — Prenons toujours les mêmes notations. Les coordonnées d'un point voisin du point (x, y, z) pourront être représentées par

$$\begin{aligned}\Delta x &= dx + \tfrac{1}{2}d^2x + \tfrac{1}{6}d^3x + \ldots,\\ \Delta y &= dy + \tfrac{1}{2}d^2y + \tfrac{1}{6}d^3y + \ldots,\\ \Delta z &= dz + \tfrac{1}{2}d^2z + \tfrac{1}{6}d^3z + \ldots,\end{aligned}$$

et, si l'on prend l'arc pour variable indépendante, ds représentera exactement la longueur de l'arc qui va du point (x, y, z) au point $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$. Soit c la longueur de la corde correspondante; en élevant les équations précédentes au carré et en les ajoutant, il vient

$$\begin{aligned}c^2 = ds^2 &+ (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)\\ &+ \tfrac{1}{3}(dx\,d^3x + dy\,d^3y + dz\,d^3z) + \tfrac{1}{4}(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) + \ldots\end{aligned}$$

en nous arrêtant aux termes du cinquième ordre. Or on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

et, en différentiant deux fois,

$$dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = 0,$$

$$dx\,d^3x + dy\,d^3y + dz\,d^3z = -(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2) = -\frac{ds^4}{R^2};$$

portant ces valeurs dans l'expression de c^2, on trouve

$$c^2 = ds^2 - \frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2}$$

ou

$$c^2 - ds^2 = -\frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2}$$

ou

$$(c + ds)(c - ds) = -\frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2}.$$

On voit que $c - ds$ est du troisième ordre; donc, aux termes du cinquième ordre près, on aura, en remplaçant $c + ds$ par $2ds$,

$$2\,ds(ds - c) = \frac{1}{12}\frac{ds^4}{R^2}$$

ou bien enfin, aux termes du quatrième ordre près,

$$ds - c = \frac{1}{24}\frac{ds^3}{R^2}.$$

On voit donc que la différence entre un arc de courbe et sa corde est, non pas du second, mais du troisième ordre. Cette différence est égale à $\frac{1}{24}\frac{ds^3}{R^2}$, aux termes du quatrième ordre près.

Gavarni, si connu par ses illustrations, s'occupait aussi de Mathématiques, et il a calculé le développement de la différence $ds - c$ suivant les puissances de ds.

X. — Formules de Serret et Frenet.

A chaque point (x, y, z) d'une courbe correspondent trois directions dites *principales* qui sont rectangulaires. Ces directions sont : 1° celle de la tangente dont nous désignerons les cosinus directeurs par a, b, c; 2° celle de la *normale principale*, ou normale située dans le plan osculateur, dont nous désignerons les cosinus directeurs par a', b', c'; 3° enfin celle de la normale au plan osculateur, ou, d'après

de Saint-Venant, la *binormale,* quand on suppose qu'elle passe par le point (x, y, z). Nous désignerons ses cosinus directeurs par a'', b'', c''.

Nous aurons d'abord entre les neuf cosinus $a, b, c, \ldots, c''$ les relations qui existent entre les neuf cosinus que l'on considère dans les formules de la transformation des coordonnées en Géométrie analytique à trois dimensions ; nous ne les écrirons que quand nous en aurons besoin.

Nous allons d'abord apprendre à calculer ces neuf cosinus. On sait déjà que

$$(1) \qquad a = \frac{dx}{ds}, \qquad b = \frac{dy}{ds}, \qquad c = \frac{dz}{ds},$$

s désignant l'arc de courbe. Ces formules définiront le sens de la tangente. Nous avons vu que la direction de la normale principale était donnée par les formules

$$(2) \qquad a' = \mathrm{R}\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad b = \mathrm{R}\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad c = \mathrm{R}\frac{d^2z}{ds^2},$$

l'arc étant pris pour variable. Enfin, en posant

$$\mathrm{A} = dy\, d^2z - dz\, d^2y, \qquad \mathrm{B} = \ldots,$$

nous avons trouvé que les coefficients directeurs de la binormale étaient A, B, C. Pour bien déterminer le sens de cette binormale, nous ferons en sorte que

$$a'' = +(bc' - cb') \quad (\text{et non } a'' = cb' - bc').$$

Nous aurons alors, à l'aide des formules (1) et (2),

$$(3) \qquad \begin{cases} a'' = \mathrm{R}\dfrac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{ds^3} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}, \\[2ex] b'' = \mathrm{R}\dfrac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{ds^3} = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{D}}, \\[2ex] c'' = \mathrm{R}\dfrac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{ds^3} = \dfrac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}}, \end{cases}$$

$$\mathrm{D}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2;$$

des formules (1) et (2) on tire

$$(4)\qquad \frac{da}{ds}=\frac{a'}{R},\qquad \frac{db}{ds}=\frac{b'}{R},\qquad \frac{dc}{ds}=\frac{c'}{R},$$

et, en différentiant (3), on a

$$da''=\frac{D\,dA-A\,dD}{D^2}=\frac{D^2\,dA-AD\,dD}{D^3}$$

ou bien

$$da''=\frac{(A^2+B^2+C^2)\,dA-A(A\,dA+B\,dB+C\,dC)}{D^3}$$
$$=\frac{B(B\,dA-A\,dB)+C(C\,dA-A\,dC)}{D^3}.$$

Or on a vu que $B\,dC-C\,dB=\Delta\,dx$, ..., ce que l'on peut d'ailleurs vérifier immédiatement; donc

$$da''=\frac{\Delta(C\,dy-B\,dz)}{D^3},$$

Δ désignant comme plus haut le déterminant de la courbe ou

$$\frac{da''}{ds}=\frac{\Delta}{D^2}(c''b-b''c)=-a'\frac{\Delta}{D^2};$$

or $\frac{\Delta}{D^2}$ est précisément égal à $\frac{1}{T}$; on a, par suite,

$$\frac{da''}{ds}=\pm\frac{a'}{T}.$$

Si l'on convient de donner un signe à T et de le prendre tel que l'on ait $T=-\frac{D^2}{\Delta}$, il viendra

$$(5)\qquad \frac{da''}{ds}=\frac{a'}{T},\qquad \frac{db''}{ds}=\frac{b'}{T},\qquad \frac{dc''}{ds}=\frac{c'}{T};$$

enfin on a

$$a'^2+b'^2+c'^2=1,$$
$$aa'+bb'+cc'=0,$$
$$aa''+bb''+cc''=0.$$

En différentiant et en faisant usage des formules (4), (5), on trouve

$$a'\frac{da'}{ds}+b'\frac{db'}{ds}+c'\frac{dc'}{ds}=0,$$

$$a\frac{da'}{ds}+b\frac{db'}{ds}+c\frac{dc'}{ds}=-\frac{1}{R},$$

$$a''\frac{da'}{ds}+b''\frac{db'}{ds}+c''\frac{dc'}{ds}=-\frac{1}{T};$$

on en tire

$$(6)\quad \frac{da'}{ds}=-\left(\frac{a}{R}+\frac{a''}{T}\right),\quad \frac{db'}{ds}=-\left(\frac{b}{R}+\frac{b''}{T}\right),\quad \frac{dc'}{ds}=-\left(\frac{c}{R}+\frac{c''}{T}\right).$$

Les formules (4), (5), (6) sont les formules de Serret et Frenet.

XI. — Démonstration nouvelle des formules de Serret et Frenet.

De la théorie des tangentes et des formules de Serret on peut déduire avec facilité toute la théorie des courbes gauches, pourvu que l'on admette encore ce théorème démontré plus haut (p. 350) :

L'intersection du plan osculateur en un point M *d'une courbe gauche avec le plan osculateur infiniment voisin est la tangente en ce point* M *de la courbe en question.*

Il importe d'établir directement ces formules, et l'on y parvient comme il suit :

Par l'origine des coordonnées menons deux droites de longueur égale à l'unité : l'une OA, parallèle à la tangente en x, y, z à la courbe ; l'autre OB, parallèle à la tangente au point voisin $x+dx, y+dy, z+dz$. AB pourra remplacer l'arc de cercle décrit de O comme centre avec OA pour rayon, et terminé en A et B. AB aura alors pour mesure l'angle de contingence de la courbe en x, y, z ; ainsi

$$AB=\frac{ds}{R},$$

R désignant comme plus haut le rayon de courbure de la courbe. Quant à la direction de AB, elle sera, à la limite, perpendiculaire au rayon OA, comme tangente à l'arc de cercle AB; elle sera d'ailleurs contenue dans le plan parallèle à deux tangentes voisines, c'est-à-dire dans un plan parallèle au plan osculateur; la direction limite de AB est donc celle de la normale principale, dont nous avons désigné les cosinus directeurs par a', b', c'.

Si l'on applique alors le théorème des projections au triangle OAB, en observant que les coordonnées de A sont a, b, c et que celles de B sont $a+da$, $b+db$, $c+dc$, on aura, en projetant successivement sur les trois axes de coordonnées

$$(7) \qquad da = a'\frac{ds}{R}, \qquad db = b'\frac{ds}{R}, \qquad dc = c'\frac{ds}{R}.$$

C'est la première des formules de Serret. Pour obtenir celles qui donnent da'', db'', dc'', menons encore par l'origine O deux droites égales à l'unité : OA parallèle à la binormale, OB parallèle à la binormale infiniment voisine; AB sera, comme tout à l'heure, perpendiculaire à OA. Or l'intersection des deux plans osculateurs normaux à OA et OB est à la limite la tangente à la courbe; cette tangente est normale à OA et OB, et par suite à leur plan et à l'élément AB situé dans ce plan; AB est donc à la limite perpendiculaire à la tangente et à la binormale, c'est-à-dire parallèle à la normale principale. Or AB mesure l'angle de deux binormales voisines; sa longueur est par suite égale à l'angle de torsion $\frac{ds}{T}$, ses projections sur les axes sont $a'\frac{ds}{T}$, $b'\frac{ds}{T}$ et $c'\frac{ds}{T}$. En projetant alors le contour OAB sur les axes, on a

$$(8) \qquad da'' = a'\frac{ds}{T}, \qquad db'' = b'\frac{ds}{T}, \qquad dc'' = c'\frac{ds}{T}.$$

Enfin on tire, en différentiant $a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$,

$$a\,da + a'\,da' + a''\,da'' = 0,$$

et, en vertu de (7) et (8),

$$aa'\frac{ds}{R} + a'da' + a''a'\frac{ds}{T} = 0$$

ou

$$(9)\qquad \begin{cases} da' = -ds\left(\dfrac{a}{R} + \dfrac{a''}{T}\right), \\ db' = -ds\left(\dfrac{b}{R} + \dfrac{b''}{T}\right), \\ dc' = -ds\left(\dfrac{c}{R} + \dfrac{c''}{T}\right). \end{cases}$$

Ainsi se trouvent établies, et de la façon la plus simple, les neuf formules de Serret et Frenet.

XII. — Enveloppe des plans osculateurs des courbes gauches, ou lieu de leurs tangentes.

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la tangente à une courbe gauche; a', b', c' les cosinus directeurs de sa normale principale; a'', b'', c'' ceux de sa binormale, l'équation du plan osculateur au point (x, y, z) est

$$(1)\qquad a''(X - x) + b''(Y - y) + c''(Z - z) = 0.$$

Pour en obtenir l'enveloppe, il faut différentier cette équation, ce qui donne

$$\frac{da''}{ds}(X - x) - \frac{dx}{ds}a'' + \ldots = 0;$$

or, si l'on remplace $\frac{dx}{ds}$ par a, ... et si l'on a égard aux formules de Serret (p. 373) qui donnent $\frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T}$, ..., la formule précédente devient, en observant que $aa'' + bb'' + cc''$ est nul,

$$(2)\qquad a'(X - x) + b'(Y - y) + c'(Z - z) = 0.$$

Cette équation est celle d'un plan perpendiculaire à la normale principale, coupant le plan osculateur suivant la tan-

gente à la courbe qui, par conséquent, est la caractéristique de l'enveloppe.

Si l'on différentie (2), on aura l'arête de rebroussement de l'enveloppe

$$\frac{da'}{ds}(X - x) - \frac{dx}{ds}a' + \ldots = 0.$$

1° Si l'on remplace $\frac{dx}{ds}$ par sa valeur a et si l'on observe que $aa' + bb' + cc' = 0$; 2° si l'on remplace $\frac{da'}{ds}$ par sa valeur $-\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)$ déduite des formules de Serret, on a

$$\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)(X - x) + \left(\frac{b}{R} + \frac{b''}{T}\right)(Y - y) + \left(\frac{c}{R} + \frac{c''}{T}\right)(Z - z) = 0.$$

Cette formule, eu égard à (1), peut s'écrire

(3) $$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0;$$

c'est l'équation d'un plan normal. Les formules (1), (2) et (3) donnent $X = x$, $Y = y$, $Z = z$. L'arête de rebroussement de la surface enveloppe des plans osculateurs d'une courbe est donc cette courbe elle-même.

XIII. — Enveloppe des plans normaux. — Sphère osculatrice ou lieu des normales principales.

Conservant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, l'équation du plan normal sera

(1) $$a(X - x) + b(Y - y) + c(Z - z) = 0;$$

la caractéristique de son enveloppe sera donnée par son équation et sa différentielle

$$\frac{da}{ds}(X - x) - a\frac{dx}{ds} + \ldots = 0$$

ou, en vertu des formules de Serret $\left(\frac{da}{ds} = \frac{a'}{R} \cdots\right)$ (p. 373),

(2) $$a'(X - x) + b'(Y - y) + c'(Z - z) = R:$$

c'est l'équation d'un plan perpendiculaire à la normale principale, située à la distance R du point (x, y, z); les formules (1), (2) représentent donc l'axe du cercle osculateur. L'élimination de s entre ces formules (1), (2) fera connaître l'enveloppe des plans normaux. Cette enveloppe a reçu le nom de *surface polaire.*

L'arête de rebroussement de la surface polaire s'obtient en différentiant (2), ce qui donne

$$\frac{da'}{ds}(X-x) - a'\frac{dx}{ds} + \ldots = \frac{dR}{ds}$$

ou bien, par les formules de Serret,

$$\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right)(X-x) + \ldots = -\frac{dR}{ds};$$

ou, en vertu de (1),

$$(3) \qquad a''(X-x) + b''(Y-y) + c''(Z-z) = -T\frac{dR}{ds}.$$

Le lieu des centres des sphères osculatrices est précisément l'arête de rebroussement de la surface polaire.

En effet, cherchons le rayon ρ et les coordonnées X, Y, Z du centre de la sphère osculatrice. Pour cela, il faudra écrire que cette sphère passe en x, y, z; nous aurons alors

$$(4) \qquad (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 = \rho^2;$$

on devra ensuite différentier cette équation, en supposant que x, y, z appartiennent à la sphère, puis exprimer que les dx, dy, dz, ... que l'on en déduit sont égaux à ceux de la courbe, ce qui produira

$$(5) \qquad \begin{cases} (X-x)\,dx + (Y-y)\,dy + (Z-z)\,dz = 0, \\ (X-x)\,d^2x + (Y-y)\,d^2y + (Z-z)\,d^2z = ds^2, \\ (X-x)\,d^3x + (Y-y)\,d^3y + (Z-z)\,d^3z = 3\,ds\,d^2s. \end{cases}$$

Ces équations font connaître $X - x$, $Y - y$, $Z - z$, et, en les portant dans (4), on en déduit ρ. Or la première équation (5) est l'équation du plan normal; quand on y considère X, Y, Z comme coordonnées courantes, les autres formules (5) sont ses différentielles; les trois formules (5) représentent donc l'arête de rebroussement de la surface polaire. Les équations (5) sont donc équivalentes à (1), (2), (3), et l'on en tire, en multipliant la première par a, la seconde par a', la troisième par a'', etc., et en les ajoutant,

$$(6) \qquad \begin{cases} X - x = a'R - a''T\dfrac{dR}{ds}, \\ Y - y = b'R - b''T\dfrac{dR}{ds}, \\ Z - z = c'R - c''T\dfrac{dR}{ds}, \end{cases}$$

et en faisant la somme des carrés et ayant égard à (4),

$$(7) \qquad \rho^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Supposons que l'on cherche un point (x, y, z) sur la courbe, tel que sa distance ρ à un point donné (X, Y, Z) soit minima, il faudra poser

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = \rho^2$$

et différentier cette équation identique à (4); on aura alors la première équation (5), ce qui indique que le point demandé (x, y, z) est sur le plan normal à la courbe menée par X, Y, Z. Si toutefois la seconde équation (5), différentielle de la première, était satisfaite, le point (X, Y, Z) serait sur l'intersection de deux plans normaux infiniment voisins, et ρ ne serait plus ni maximum, ni minimum; à moins enfin que la dernière équation (5) n'ait lieu également, alors le point (X, Y, Z) serait précisément le centre de la sphère osculatrice en x, y, z.

Le centre de la sphère osculatrice, comme l'on voit, est, sur l'axe du cercle osculateur, le point pour lequel sa distance à la courbe a un minimum, à l'exclusion de tous les autres.

Remarque. — Soient a_1, b_1, c_1; a'_1, b'_1, c'_1; a''_1, b''_1, c''_1, s_1, R_1, T_1 les quantités analogues à a, b, c, ..., R, T, mais relatives à l'arête de rebroussement de la surface polaire. Le plan normal de la courbe proposée est, d'après la définition de la surface polaire, le plan osculateur de l'arête de rebroussement de cette surface; donc

$$(1) \qquad a''_1 = a, \qquad b''_1 = b, \qquad c''_1 = c.$$

En différentiant ces équations et appliquant les formules de Serret, on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{a'_1}{T_1}\, ds_1 &= \frac{a'}{R}\, ds, \\ \frac{b'_1}{T_1}\, ds_1 &= \frac{b'}{R}\, ds, \\ \frac{c'_1}{T_1}\, ds_1 &= \frac{c'}{R}\, ds \end{aligned} \right.$$

et, en ajoutant les carrés,

$$(3) \qquad \frac{ds_1}{T_1} = \frac{ds}{R}.$$

Multiplions les deux dernières équations (2) et les deux dernières équations (1); nous avons

$$\frac{b'_1 c''_1 - c'_1 b''_1}{T_1}\, ds_1 = \frac{b'c - c'b}{R}\, ds,$$

c'est-à-dire

$$\frac{a_1}{T_1}\, ds_1 = -\frac{a''}{R}\, ds;$$

donc, en vertu de (3),

$$(4) \qquad a_1 = -a'', \qquad b_1 = -b'', \qquad c_1 = -c''.$$

Donc *le plan normal à l'arête de rebroussement de la surface polaire est parallèle au plan osculateur de la courbe proposée.*

Enfin, si l'on différentie les formules précédentes en ayant égard aux relations de Serret, on trouve

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{a'_1}{R_1}\,ds_1 = -\dfrac{a'}{T}\,ds, \\ \dfrac{b'_1}{R_1}\,ds_1 = -\dfrac{b'}{T}\,ds, \\ \dfrac{c'_1}{R_1}\,ds_1 = -\dfrac{c'}{T}\,ds, \end{cases}$$

d'où l'on tire, en ajoutant les carrés,

$$(6)\qquad \frac{ds_1}{R_1} = \frac{ds}{T}.$$

Les formules (3) et (6) donnent donc

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{R_1}{T} = \frac{T_1}{R},$$

et ce théorème remarquable

$$RR_1 = TT_1.$$

XIV. — Développées des courbes gauches.

On dit qu'une courbe A est une développée de la courbe B, si les tangentes à A sont normales à B.

Les normales principales d'une courbe ne sauraient envelopper une développée de la courbe et, par suite, le lieu des centres de courbure ne saurait non plus être une développée.

Pour le prouver, il suffit de calculer la plus courte distance de deux normales principales infiniment voisines et de montrer que cette plus courte distance est du premier ordre.

Les équations de la normale principale sont, avec les notations du paragraphe précédent,

$$\frac{X-x}{a'}=\frac{Y-y}{b'}=\frac{Z-z}{c'};$$

celles de la normale infiniment voisine sont

$$\frac{X-x-dx}{a'+da'}=\frac{Y-y-dy}{b'+db'}+\frac{Z-z-dz}{c'-dc'}.$$

Si l'on appelle h la plus courte distance en question, on a

$$h=\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ a' & b' & c' \\ da' & db' & dc' \end{vmatrix} : \sqrt{(b'dc'-c'db')^2+(c'da'-a'dc')^2+(a'db'-b'da')^2}$$

ou, en vertu des formules de Serret,

$$h=ds^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \frac{a''}{T} & \frac{b''}{T} & \frac{c''}{T} \end{vmatrix} : \sqrt{da'^2+db'^2+dc'^2}$$

$$=\frac{ds^2}{T}:\sqrt{\frac{ds^2}{T^2}+\frac{ds^2}{R^2}}=\frac{R\,ds}{\sqrt{T^2+R^2}}.$$

Cette quantité h est donc bien du premier ordre.

C. Q. F. D.

Un procédé analogue à celui-ci montre que la plus courte distance de deux binormales infiniment voisines est égale à ds aux termes du second ordre près.

Théorème I. — *Les développées d'une courbe se trouvent sur la surface polaire.*

En effet, si l'on considère deux tangentes à la développée, elles seront dans deux plans normaux à la courbe proposée, et, comme elles se coupent en un point de la développée, ce point de la développée se trouvera à l'intersection de deux plans normaux, c'est-à-dire sur la surface polaire. Nous allons le vérifier par l'analyse.

En conservant toujours nos notations, les équations d'une normale quelconque seront :

1° L'équation du plan normal

$$\sum a(X-x)=0; \tag{1}$$

2° L'équation d'un plan passant par la tangente, d'ailleurs tout à fait quelconque; en appelant i l'angle que ce plan fait avec le plan osculateur, son équation pourra être présentée sous la forme $A''=A'\operatorname{tang} i$ ou $A''-A'\operatorname{tang} i=0$, A'' désignant la distance du point (X, Y, Z) au plan osculateur, et A' la distance du même point au plan perpendiculaire à la normale principale. L'équation $A''-A'\operatorname{tang} i=0$ peut s'écrire

$$\sum(a''-a'\operatorname{tang} i)(X-x)=0. \tag{2}$$

Spécifions maintenant que la droite (1), (2) engendre une surface développable ou rencontre la normale qui lui est infiniment voisine, nous aurons la condition pour que (X, Y, Z) soit le point d'une développée. Si, pour abréger, on représente (1) et (2) par $P=0$, $Q=0$, la droite infiniment voisine de celle que nous considérons sera représentée par $P+dP=0$, $Q+dQ=0$, et la position du point (X, Y, Z) ne sera pas altérée en remplaçant ces formules par $dP=0$, $dQ=0$. Ce sont ces équations que j'écris

$$\sum da(X-x)-\sum a\,dx=0,$$

$$\sum(da''-da'\operatorname{tang} i-a'\operatorname{s\acute{e}c}^2 i\,di)(X-x)-\sum(a''-a'\operatorname{tang} i)dx=0.$$

D'après les formules de Serret, ces équations peuvent être remplacées par

$$\sum\frac{a'}{R}(X-x)-1=0, \tag{3}$$

$$\sum\left[\frac{a'}{T}+\left(\frac{a}{R}+\frac{a''}{T}\right)\operatorname{tang} i-a'\operatorname{s\acute{e}c}^2 i\frac{di}{ds}\right](X-x)=0. \tag{4}$$

La condition de rencontre s'obtiendra en éliminant X, Y, Z

entre (1), (2) et (4), ce qui donne, toutes réductions faites,

$$\frac{1}{T} - \frac{di}{ds} = 0; \tag{5}$$

d'où l'on conclut que di est l'angle de torsion et que i renferme une constante arbitraire, puisqu'il est donné par sa dérivée. Il en résulte que X, Y, Z, donnés en fonctions de i par les formules (1), (2), (3), renfermeront une constante arbitraire; donc :

THÉORÈME II. — *Une courbe a une infinité de développées.*

Ces développées sont sur la surface polaire, car (1) et (3) sont l'équation d'un plan normal et du plan normal voisin. Elles représentent l'axe du cercle osculateur.

De (1), (2), (3) on tire

$$\left\{\begin{aligned} X - x &= R(a' + a'' \operatorname{tang} i), \\ Y - y &= R(b' + b'' \operatorname{tang} i), \\ Z - z &= R(c' + c'' \operatorname{tang} i); \end{aligned}\right. \tag{6}$$

ce sont les équations d'une des développées. Si nous différentions ces formules, nous aurons

$$\begin{aligned} dX - a\,ds = {} & dR(a' + a'' \operatorname{tang} i) \\ & + R\left(-\frac{a}{R} - \frac{a''}{T} + \frac{a'}{T} \operatorname{tang} i + a'' \operatorname{séc}^2 i \frac{di}{ds}\right) ds \end{aligned}$$

et, en simplifiant, puis en observant que $\frac{1}{T} = \frac{di}{ds}$,

$$dX = dR(a' + a'' \operatorname{tang} i) + R(a' \operatorname{tang} i + a'' \operatorname{tang}^2 i)\,di;$$

en ajoutant cette équation avec ses analogues après les avoir élevées au carré, on a, en appelant s_1 l'arc de développée,

$$ds_1^2 = (dR + R \operatorname{tang} i\,di)^2(1 + \operatorname{tang}^2 i)$$

ou

$$ds_1 = \frac{dR}{\cos i} + \frac{R \operatorname{tang} i}{\cos i} di = \frac{dR}{\cos i} + R\,d\frac{1}{\cos i}.$$

ou

$$ds_1 = d\left(\frac{R}{\cos i}\right).$$

Or $\frac{R}{\cos i}$ est la distance du point (X, Y, Z) au point (x, y, z), ce dont on peut se convaincre en ajoutant les carrés de (6); en appelant donc u cette distance, on trouve

$$ds_1 = du, \qquad s_1 = u - u_0.$$

Théorème III. — *L'arc de développée est donc égal aux différences des distances de ses extrémités aux points correspondants de la courbe proposée.*

Appelons $a_1, b_1, c_1, \ldots, R_1, T_1$ les quantités analogues à $a, b, c, \ldots, R, T$ relatives à la développée; on a évidemment

$$a_1 a + b_1 b + c_1 c = \sum a a_1 = 0,$$

puisque la tangente à la développée est, par définition, normale à la courbe proposée.

On a aussi

$$(7) \qquad X - x = a_1 u, \qquad Y - y = b_1 u, \qquad Z - z = c_1 u;$$

si l'on différentie ces formules, en tenant compte de $ds_1 = du$, on trouve

$$a_1 ds_1 - a\,ds = a_1 ds_1 + \frac{a'_1 u}{R_1} ds_1;$$

par suite,

$$a\,ds = -\frac{a'_1 u}{R_1} ds_1, \qquad b\,ds = -\frac{b'_1 u}{R_1} ds_1, \qquad \ldots;$$

on en conclut

$$(8) \qquad \frac{ds}{ds_1} = \frac{u}{R_1}, \qquad a = -a'_1, \qquad b = -b'_1, \qquad c = -c'_1;$$

donc :

Théorème IV. — *La normale principale de la développée est parallèle à la tangente à la courbe proposée.*

Si l'on différentie les formules (8), on a

$$\frac{a'}{R} = \frac{a_1}{R_1} + \frac{a''_1}{T_1}, \quad \ldots;$$

en élevant au carré et en ajoutant, il vient

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{T_1^2}.$$

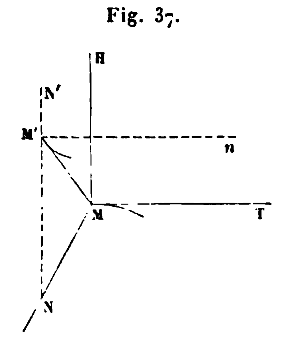
On voit que T_1 ne peut être infini que si $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}$ ou $R = R_1$, et alors $a' = a_1$, $b' = b_1$, $c' = c_1$; la développée est donc tangente à une parallèle à la normale principale, c'est-à-dire à cette normale principale; or deux normales principales ne peuvent se rencontrer que si la courbe est plane; donc :

Théorème V. — *Les développées des courbes gauches sont gauches, les développées des courbes planes sont gauches, à l'exception de celle qui est dans le plan de la courbe.*

XV. — Du lieu des centres de courbure.

Le lieu des centres de courbure ne saurait être une développée, puisque les normales principales ne se rencontrent

Fig. 37.



pas. Mais ce lieu se trouve sur la surface polaire, qui est le lieu des axes des cercles osculateurs et qui contient, par suite, les centres de ces cercles.

Soient

MT la tangente à la courbe proposée;
MN la normale principale;
MH la binormale;
NN′ l'axe du cercle osculateur.

La tangente à la développée au point M′ de cette courbe est la normale MM′ à la courbe proposée, M′n parallèle à MT est la normale principale de la développée, M′h binormale de la développée est dans le plan normal à la courbe proposée; on a donc

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} \sum a_1 a = 0, & \sum a_1 a' = \cos i, & \sum a_1 a'' = \sin i, \\ \sum a'_1 a = 1, & \sum a'_1 a' = 0, & \sum a'_1 a'' = 0, \\ \sum a''_1 a = 0; & \sum a''_1 a' = \sin i; & \sum a''_1 a'' = \cos i; \end{array}\right.$$

$$a'_1 = a.$$

Il résulte encore de là que le plan osculateur de la développée MM′n est normal à la surface polaire; car la normale principale M′n est perpendiculaire à la tangente MM′ de la développée et à la génératrice M′N de la surface polaire, c'est-à-dire à deux tangentes passant en a' de la surface polaire.

Une courbe tracée sur une surface, et dont la normale principale et, par suite, dont le plan osculateur est normal à la surface, est dite *ligne géodésique;* ainsi :

Théorème I. — *Les développées sont des géodésiques de la surface polaire.*

Le plan M′MN est tangent à la surface polaire, car il en contient deux tangentes, à savoir MM′ et la génératrice M′N. Cela posé, enroulons le plan M′MN sur la surface polaire; comme du ou dMM′ est égal à ds_1, si nous désignons par des lettres portant l'indice o ce que deviennent les points

M′, N′, ... quand M passe en M_0 situé sur la courbe proposée, la droite MM′ s'enroulera sur la surface polaire, le point M′ tombant en M'_0, et il arrivera un moment où le point M_0 lui-même s'appliquera sur la surface polaire; mais ce point M_0 coïncidera alors avec le point M; donc :

Théorème II. — *Lorsque l'on enroule le plan* M′MN *sur la surface polaire, toutes les développées sont les courbes suivant lesquelles s'enroulent les normales telles que* MM′ *et, par suite, toutes les développées passent par un point fixe.*

Réciproquement, quand on développe la surface polaire, les développées se transformeront en droites passant par un point fixe.

Le lieu des centres de courbure est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées des points M sur la génératrice de la surface polaire; donc :

Théorème III. — *Le lieu des centres de courbure est, après le développement de la surface polaire, la podaire du point par lequel passent les développées, par rapport à la transformée de l'arête de rebroussement.*

XVI. — Du plan rectifiant et de la surface rectifiante.

On appelle *plan rectifiant* d'une courbe le plan qui passe par la tangente et la binormale; ce plan enveloppe une surface développable appelée *surface rectifiante;* la caractéristique du *plan rectifiant* est appelée la *droite rectifiante.*

Le plan rectifiant a pour équation, en employant toujours les mêmes notations,

$$(1)\qquad (X-x)a'+(Y-y)b'+(Z-z)c'=0;$$

sa caractéristique ou la droite rectifiante aura pour équa-

tions (1) et la suivante, obtenue en différentiant (1) et en ayant égard aux formules de Serret

$$(2)\ (X-x)\left(\frac{a}{R}+\frac{a''}{T}\right)+(Y-y)\left(\frac{b}{R}+\frac{b''}{T}\right)+(Z-z)\left(\frac{c}{R}+\frac{c''}{T}\right)=0.$$

La droite rectifiante passe donc par le point (x, y, z) de la courbe considérée; ses coefficients directeurs sont

$$b'\left(\frac{c}{R}+\frac{c''}{T}\right)-c'\left(\frac{b}{R}+\frac{b''}{T}\right), \quad \ldots$$

ou bien

$$\frac{a}{T}-\frac{a''}{R}, \quad \frac{b}{T}-\frac{b''}{R}, \quad \frac{c}{T}-\frac{c''}{R};$$

la droite rectifiante fait avec la tangente à la courbe un angle j donné par les formules

$$\cos j = \frac{1}{T} : \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}},$$

$$\sin j = \frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}},$$

$$\operatorname{tang} j = \frac{T}{R}.$$

Les développantes de la courbe proposée sont les trajectoires orthogonales des tangentes; elles sont, par conséquent, situées sur la développable lieu des tangentes. Considérons une de ces développantes et menons-lui un plan normal; ce plan normal passera par la génératrice de cette développable, c'est-à-dire par la tangente à la courbe proposée en (x, y, z), et il sera perpendiculaire au plan, tangente de cette développable : ce sera précisément le plan rectifiant en x, y, z, Ainsi :

Le plan rectifiant est normal aux développantes de la courbe proposée.

Le plan rectifiant enveloppe donc la surface polaire, commune à toutes les développantes de la courbe proposée; or

la courbe proposée étant une développée de ses développantes 1° se trouvera sur la surface polaire en question, ce qui était évident; 2° se transformera, après le développement de la surface rectifiante, en une ligne droite. On peut dire que :

La surface rectifiante d'une courbe est une développable contenant cette courbe, et telle que, si l'on développe cette surface sur un plan, celle-ci se transforme en une ligne droite.

La surface rectifiante est d'ailleurs la seule surface jouissant de cette propriété; car la courbe proposée, devant se transformer en une ligne droite, est une géodésique de la surface, et nous verrons plus loin que les géodésiques d'une surface ont leur plan osculateur normal à cette surface. La surface cherchée doit donc avoir son plan tangent normal au plan osculateur à la courbe proposée; comme il doit contenir la tangente à cette courbe, il est déterminé et son enveloppe l'est par suite. C. Q. F. D.

XVII. — Sur le déplacement des figures.

Nous allons maintenant étudier le mouvement d'une figure invariable de forme. Quoique ce sujet soit traité à fond dans la Mécanique rationnelle, nous en dirons ici quelques mots, à cause de l'importance qu'il a en Géométrie.

Rapportons la figure mobile à deux systèmes d'axes, l'un ox, oy, oz parfaitement fixe, l'autre $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ mobile, mais invariablement lié à la figure mobile.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de la figure mobile par rapport aux axes fixes, ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux axes mobiles; ξ, η, ζ seront constants et $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ seront nuls pendant le mouvement.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point Ω par rapport aux axes fixes; en appelant a, b, c, a', b', c', ... les cosinus

directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes, on aura les formules connues

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x_0 + a\xi + a'\eta + a''\zeta, \\ y = y_0 + b\xi + b'\eta + b''\zeta, \\ z = z_0 + c\xi + c'\eta + c''\zeta; \end{cases}$$

en supposant alors que le système prenne un mouvement infiniment petit, il viendra

$$(2)\qquad \begin{cases} dx = dx_0 + \xi\,da + \eta\,da' + \zeta\,da'', \\ dy = dy_0 + \xi\,db + \eta\,db' + \zeta\,db'', \\ dz = dz_0 + \xi\,dc + \eta\,dc' + \zeta\,dc''. \end{cases}$$

Le déplacement ds du point x, y, z est la résultante de deux autres dont les projections sont dx_0, dy_0, dz_0 et

$$(3)\qquad \begin{cases} \delta x = \xi\,da + \eta\,da' + \zeta\,da'', \\ \delta y = \xi\,db + \eta\,db' + \zeta\,db'', \\ \delta z = \xi\,dc + \eta\,dc' + \zeta\,dc''. \end{cases}$$

Quel que soit le point (x, y, z), le déplacement dx_0, dy_0, dz_0 sera le même : ainsi on peut regarder le premier déplacement comme un mouvement de translation; considérons le second. En vertu des relations bien connues entre les neuf cosinus $a, b, c, \ldots$, on aura par différentiation

$$(4)\qquad \begin{cases} a\,da + b\,db + c\,dc = 0, \\ a'\,da' + b'\,db' + c'\,dc' = 0, \\ a''\,da'' + b''\,db'' + c''\,dc'' = 0; \\ a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc' = -(a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc'') = p\,dt, \\ a\,da'' + b\,db'' + c\,dc'' = -(a''\,da + b''\,db + c''\,dc\;) = q\,dt, \\ a'\,da + b'\,db + c'\,dc = -(a\,da' + b\,db' + c\,dc'\,) = r\,dt; \end{cases}$$

dt désignant une variable indépendante, qui sera, si l'on veut, l'élément décrit par le point x_0, y_0, z_0.

Ceci posé, multiplions les équations (3) par a, b, c et ajoutons-les, puis observons que $a\delta x + b\delta y + c\delta z$ est la projection du du déplacement δx, δy, δz sur l'axe des ξ, nous aurons

$$du = (\zeta q - \eta r)\,dt;$$

appelant de même dv et dw les projections du déplacement δx, δy, δz sur $\Omega\eta$ et $\Omega\zeta$, on a le groupe de formules

$$(5)\qquad \begin{cases} du = (\zeta q - \eta r)\,dt, \\ dv = (\xi r - \zeta p)\,dt, \\ dw = (\eta p - \xi q)\,dt. \end{cases}$$

Dans ce déplacement, il y aura des points qui resteront immobiles ou, pour parler plus exactement, il y aura des points qui décriront des chemins du second ordre : on les obtiendra en faisant du, dv, $dw = 0$ dans les équations (5), qui deviennent alors

$$\zeta q - \eta r = 0, \qquad \xi r - \zeta p = 0, \qquad \eta p - \xi q = 0,$$

et qui se réduisent à deux

$$(6)\qquad \frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r};$$

les points qui dans le déplacement restent immobiles sont situés sur une droite (6). Cette droite a reçu le nom d'*axe instantané de rotation relatif au point* Ω; la direction de cet axe est indépendante de ce point Ω. Ses cosinus directeurs sont, en posant

$$(7)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2,$$

donnés par les formules $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$; on voit que, dans le déplacement partiel que nous considérons, tous les points *tourneront* autour de l'axe instantané, et que le mouvement peut être considéré comme un mouvement de rotation autour de l'axe instantané.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Tout mouvement d'une figure invariable de forme peut être décomposé, et cela d'une infinité de manières, en deux mouvements : l'un de translation, l'autre de rotation.*

De quelque manière que se fasse la décomposition, l'axe de la rotation a une direction constante.

Remarque. — Si la figure mobile présentait un point fixe, on pourrait supposer que ce soit le point (x_0, y_0, z_0); alors on aurait $dx = \delta x$, $dy = \delta y$, $dz = \delta z$. Donc :

Théorème II. — *Tout mouvement infiniment petit d'une figure invariable de forme, qui présente un point fixe, peut être considéré comme une rotation autour d'un axe passant par le point fixe.*

Reprenons les formules (5), faisons dans ces formules $\eta = \zeta = 0$, puis faisons momentanément coïncider l'axe $\Omega\zeta$ avec l'axe instantané; alors $p = q = 0$, $r = \omega$, on trouve

$$du = 0, \qquad dv = \omega\xi\, dt, \qquad dw = 0.$$

Ces formules montrent que $\omega\, dt = \frac{dv}{\xi}$; or dv est, en grandeur, le chemin parcouru par un point situé à la distance ξ de l'axe : donc ωdt est l'angle dont a tourné le système : $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ sont les projections de cet angle sur les plans des $\zeta\eta$, des $\zeta\xi$ et des $\xi\eta$.

XVIII. — Axe de glissement.

Parmi toutes les manières dont on peut décomposer le mouvement d'une figure invariable de forme en une rotation et en une translation, il y en a une plus simple et qui consiste à choisir la translation parallèle à l'axe instantané; cela est possible : il suffit de choisir le point (x_0, y_0, z_0) de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dx_0}{ap + a'q + a''r} = \frac{dy_0}{bp + b'q + b''r} = \frac{dz_0}{cp + c'q + c''r}.$$

L'axe de rotation porte alors le nom d'*axe de glissement;* il est caractérisé par ce fait que tous ses points décrivent des

droites égales et parallèles; on peut donc le définir en disant que c'est le lieu des points x, y, z, tels que

$$\frac{dx}{ap+a'q+a''r}=\frac{dy}{bp+b'q+b''r}=\frac{dz}{cp+c'q+c''r}$$
$$=\frac{ds}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{ds}{\omega}.$$

On peut écrire ces équations

$$\frac{dx_0+\xi da+\eta da'+\zeta da''}{ap+a'q+a''r}=\frac{dy_0+\xi db+\eta db'+\zeta db''}{bp+b'q+b''r}$$
$$=\frac{dz_0+\xi dc+\eta dc'+\zeta dc''}{cp+c'q+c''r}=\frac{ds}{\omega}.$$

En égalant cette suite de rapports à λdt, on a

$$\begin{aligned}\xi da+\eta da'+\zeta da''&=\lambda(ap+a'q+a''r)-dx_0,\\ \xi db+\eta db'+\zeta db''&=\lambda(bp+b'q+b''r)-dy_0,\\ \xi dc+\eta dc'+\zeta dc''&=\lambda(cp+c'q+c''r)-dz_0;\end{aligned}$$

posant $a\,dx_0+b\,dy_0+c\,dz_0=du_0$, ..., on trouve

$$\begin{aligned}\zeta q-\eta r&=\lambda p-\frac{du_0}{dt},\\ \xi r-\zeta p&=\lambda q-\frac{dv_0}{dt},\\ \eta p-\xi q&=\lambda r-\frac{dw_0}{dt}.\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\lambda\omega^2-p\frac{du_0}{dt}-q\frac{dv_0}{dt}-r\frac{dw_0}{dt}=0,$$

$$\lambda(p\xi+q\eta+r\zeta)-\xi\frac{du_0}{dt}-\eta\frac{dv_0}{dt}-\zeta\frac{dw_0}{dt}=0.$$

La première de ces équations détermine λ, et les équations de l'axe de glissement sont

$$\zeta q-\eta r=\frac{p}{\omega}\left(\frac{p}{\omega}\frac{du_0}{dt}+\frac{q}{\omega}\frac{dv_0}{dt}+\frac{r}{\omega}\frac{dw_0}{dt}\right)-\frac{du_0}{dt},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou

$$\zeta q - \eta r = \frac{p}{\omega}\theta - \frac{du_0}{dt},$$
$$\xi r - \zeta p = \frac{q}{\omega}\theta - \frac{dv_0}{dt},$$
$$\eta p - \xi q = \frac{r}{\omega}\theta - \frac{dw_0}{dt},$$

θ désignant $\frac{ds_0}{dt}\cos(\omega, s_0)$. Ce sont les équations de l'axe de glissement *par rapport* aux axes $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$; *par rapport* aux autres axes, ces équations seront

$$q[a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)] \\ - r[a'(x - x_0) + \ldots] = \frac{p}{\omega}\theta - \frac{du_0}{dt},$$

....

XIX. — Sur le déplacement des lignes remarquables liées aux divers points d'une courbe.

Considérons le trièdre formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe, et étudions son déplacement par rapport à trois axes fixes Ox, Oy, Oz.

Soient a, b, c les cosinus directeurs de la tangente, a', b', c' ceux de la normale principale, et a'', b'', c'' ceux de la binormale; soient R et T les rayons de courbure et de torsion, ds l'arc de courbe, dp, dq, dr les projections du déplacement angulaire des axes liés à la courbe, on aura, en vertu des formules de Serret (p. 372),

$$p\,ds = -(a'da'' + b'db'' + c'dc'') \\ = -\left(a'\frac{a'}{T} + b'\frac{b'}{T} + c'\frac{c'}{T}\right)ds = -\frac{ds}{T},$$
$$q\,ds = -(a''da + b''ab + c''dc) = -\left(a''\frac{a'}{R} + b''\frac{b'}{R} + c''\frac{c'}{R}\right)ds = 0,$$
$$r\,ds = (a'da - b'db - c'dc) = \left(a'\frac{a'}{R} + b'\frac{b'}{R} + c'\frac{c'}{R}\right)ds = +\frac{ds}{R}.$$

Donc le trièdre considéré subit d'abord un mouvement de

translation parallèle à ds, puis un mouvement de rotation autour d'un axe situé dans le plan rectifiant; les cosinus des angles que cette droite fait avec la tangente et avec la binormale sont

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+T^2}}, \quad \frac{T}{\sqrt{R^2+T^2}};$$

l'angle de rotation est

$$ds\sqrt{p^2+q^2} = ds\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}} = \frac{ds}{RT}\sqrt{R^2+T^2}.$$

Si l'on se reporte au § XVI, on voit que l'axe instantané de rotation n'est autre chose que la droite rectifiante : de là vient l'expression de *droite rectifiante*.

Supposons que l'on brise une courbe à l'extrémité de chaque élément ds dans laquelle on peut la décomposer; si l'on veut ramener tous ces éléments en ligne droite, il faudra les faire tourner autour de l'axe instantané *qui est la droite rectifiante* de l'angle $\frac{ds}{RT}\sqrt{R^2+T^2}$, ou successivement autour de la binormale d'un angle égal à $\frac{ds}{R}$ et autour de la tangente d'un angle égal à $\frac{ds}{T}$. Cette dernière manière de procéder est évidente. Ce qui était moins évident, c'est que ces deux mouvements successifs étaient équivalents à un mouvement de rotation unique effectué autour de la droite rectifiante.

XX. — De l'hélice.

On appelle *hélice* une courbe tracée sur un cylindre et dans laquelle la distance d'un point à la section droite du cylindre est proportionnelle à l'arc de cette section droite.

Nous étudierons spécialement l'hélice ordinaire qui est tracée sur un cylindre droit à base circulaire. Cette courbe a pour équations

$$(1) \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

φ est l'angle au centre qui mesure l'arc de section droite auquel la distance z du point (x, y, z) de l'hélice est proportionnel. Alors l'axe du cylindre est l'axe des z et les équations $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ sont les équations du cercle de base du cylindre sur lequel est tracée l'hélice; h est le *pas* de l'hélice.

Tangente. — Les équations de la tangente sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

ou

$$\frac{X - x}{-r\sin\varphi} = \frac{Y - y}{r\cos\varphi} = \frac{Z - z}{h}\,2\pi.$$

L'angle i que fait la tangente avec la génératrice du cylindre est constant.

En effet, on a

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \cos i = \dfrac{h : 2\pi}{\sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}, \qquad \sin i = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + \dfrac{h^2}{4\pi^2}}}, \\ \tang i = \dfrac{2\pi r}{h}, \qquad \cot i = \dfrac{h}{2\pi r}. \end{array}\right.$$

Plan osculateur. — Il a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - r\cos\varphi & Y - r\sin\varphi & Z - \dfrac{h}{2\pi}\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & \dfrac{h}{2\pi} \\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est-à-dire

$$\frac{h}{2\pi} rX\sin\varphi - \frac{h}{2\pi} rY\cos\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right) r^2 = 0$$

ou encore

$$X\sin\varphi - Y\cos\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi r}{h} = 0.$$

Si l'on fait $Z = 0$, on voit que la trace de ce plan a pour équation

$$X \sin\varphi - Y \cos\varphi - r\varphi = 0.$$

Son enveloppe sera donnée en combinant cette équation avec

$$X \cos\varphi + Y \sin\varphi - r = 0,$$

ce qui donne

$$X^2 + Y^2 = r^2(1 + \varphi^2)$$

ou

$$\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}.$$

Donc l'enveloppe a pour équation

$$X \cos\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{r} - Y \sin\frac{\sqrt{X^2 + Y^2 - r^2}}{r} = r.$$

L'angle que le plan osculateur fait avec le plan de base du cylindre est constant; car cet angle a pour cosinus

$$\frac{2\pi r}{h} : \sqrt{1 + \frac{4\pi^2 r^2}{h^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}},$$

ou $\sin i$; il fait donc l'angle i avec la génératrice du cylindre; *il rencontre l'axe du cylindre à la hauteur du point où il est osculateur.*

Car pour $X = 0$, $Y = 0$, on a $Z = \frac{h}{2\pi}\varphi$.

Rayon de courbure, arc, rayon de torsion, etc. — On a

$$\begin{aligned}
dx &= -r\sin\varphi\, d\varphi, & dy &= r\cos\varphi\, d\varphi, & dz &= \frac{h}{2\pi} d\varphi,\\
d^2x &= -r\cos\varphi\, d\varphi^2, & d^2y &= -r\sin\varphi\, d\varphi^2, & d^2z &= 0,\\
d^3x &= r\sin\varphi\, d\varphi^3, & d^3y &= -r\cos\varphi\, d\varphi^3, & d^3z &= 0;
\end{aligned}$$

donc

$$(3) \qquad ds^2 = \left(r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right) d\varphi^2 = \frac{r^2\, d\varphi^2}{\sin^2 i}.$$

Il vient ensuite

$$ds^6 R^{-2} = \left(\frac{h^2}{4\pi^2} r^2 + r^4\right) d\varphi^6$$

ou

$$R^{-2} = r^2 : \left(\frac{h^2}{4\pi^2} + r^2\right)^2$$

ou enfin

$$R = \frac{1}{r}\left(\frac{h^2}{4\pi^2} + r^2\right) = \frac{r}{\sin^2 i}.$$

Si l'on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi & \frac{h}{2\pi} \\ -r\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ r\sin\varphi & -r\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} d\varphi^6,$$

ou

$$\Delta = \frac{h}{2\pi} r^2 d\varphi^6,$$

on a

$$T = \frac{ds^6}{R^2\Delta} = \frac{r^2}{\sin^2 i}\,\frac{2\pi}{h} = \frac{r}{\sin i \cos i}.$$

Le rayon ρ de la sphère osculatrice est égal à R, car

$$\rho = R + T\frac{dR}{ds} = R.$$

Normale principale. — Ses coefficients sont

$$d^2x\,ds - d^2s\,dx, \qquad \ldots,$$

ou simplement, puisque $d^2s = 0$, d^2x, d^2y, d^2z; ses équations sont

$$\frac{x - r\cos\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{y - r\sin\varphi}{r\sin\varphi} = \frac{z - \frac{h}{2\pi}\varphi}{0}$$

ou

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}, \qquad z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

La normale principale est donc perpendiculaire à l'axe du cylindre.

XXI. — Hélicoïde développable.

L'hélicoïde développable est le lieu des tangentes à l'hélice; nous allons trouver ses équations. La tangente à l'hélice a pour équations

$$\frac{X - r\cos\varphi}{-r\sin\varphi} = \frac{Y - r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{Z - \frac{h}{2\pi}\varphi}{\frac{h}{2\pi}}$$

ou bien

$$(1)\qquad \begin{cases} X = r\cos\varphi - \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi}{h}r\sin\varphi, \\ Y = r\sin\varphi + \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi}{h}r\cos\varphi. \end{cases}$$

On en tire

$$(2)\qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 = \frac{4\pi^2}{h^2}r^2\left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)^2 + r^2, \\ X\cos\varphi + Y\sin\varphi = r, \\ X\sin\varphi - Y\cos\varphi = \left(Z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{2\pi r}{h}. \end{cases}$$

La trace de l'hélicoïde sur le plan des xy est une développante de cercle; on l'obtient en effet en posant $z = 0$ dans (1), ce qui donne

$$(3)\qquad \begin{cases} X = r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi, \\ Y = r\sin\varphi - r\varphi\cos\varphi. \end{cases}$$

Ce sont les équations de la développante de cercle. Il va sans dire que toutes les sections horizontales de l'hélicoïde seront également des développantes de cercle.

Les génératrices de l'hélicoïde développable rencontrent la développante, trace de l'hélicoïde sur le plan des xy à angle droit.

En effet, les coefficients directeurs de la tangente à la courbe (3) sont

$$-r\sin\varphi + r\varphi\cos\varphi + r\sin\varphi, \quad r\cos\varphi + r\varphi\sin\varphi - r\cos\varphi, \quad 0,$$

ou

$$r\varphi\cos\varphi,\quad +r\varphi\sin\varphi,\quad 0;$$

ceux de la génératrice de l'hélicoïde

$$-r\sin\varphi,\quad r\cos\varphi,\quad 0.$$

Ces deux directions satisfont bien à la condition d'orthogonalité.

Les sections de l'hélicoïde par des plans perpendiculaires à l'axe sont les développantes de l'arête de rebroussement. Donc :

Les développantes de l'hélice sont des développantes de cercle.

Cherchons maintenant la surface polaire de l'hélice

$$x = r\cos\varphi,\qquad y = r\sin\varphi,\qquad z = \frac{h}{2\pi}\varphi.$$

Le plan normal a pour équation

$$(4)\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi + \left(z - \frac{h}{2\pi}\varphi\right)\frac{h}{2\pi r} = 0;$$

la droite polaire a pour équation (4) et sa dérivée

$$(5)\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - \frac{h^2}{4\pi^2 r} = 0.$$

Si nous comparons les formules (4) et (5) avec (2), nous voyons que ces équations (4), (5) représentent un hélicoïde dont l'arête de rebroussement serait tracée sur un cylindre de rayon $\frac{h^2}{4\pi^2 r}$ et dont le pas serait h. Donc :

La surface polaire d'une hélice est un hélicoïde développable.

XXII. — Développées de l'hélice.

Les équations d'une développée sont

$$(1)\qquad \begin{cases} X - x = R(a' - a''\operatorname{tang} i), \\ Y - y = R(b' - b''\operatorname{tang} i), \\ Z - z = R(c' - c''\operatorname{tang} i), \end{cases}$$

où $\frac{di}{ds} = \frac{1}{T}$. Comme T est constant, tang$i$ est une constante arbitraire que nous appellerons k; d'ailleurs

$$a' = R\frac{da}{ds} = R\frac{da}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = -Rr\cos\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

$$b' = -Rr\sin\varphi\frac{d\varphi}{ds},$$

$$c' = 0,$$

$$a'' = bc' - cb' = R\frac{d\varphi}{ds}(b\,dc - c\,db),$$

....

En substituant ces valeurs dans (1) et en remplaçant a, b, c par leurs valeurs, on obtient des équations compliquées et transcendantes que nous n'écrirons pas.

XXIII. — Projections de l'hélice.

Lorsque l'on projette obliquement une hélice sur un plan, on obtient une cycloïde allongée, raccourcie ou proprement dite.

En effet, les équations de l'hélice étant

$$(1) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi}\varphi,$$

une droite parallèle au plan des zx a pour équations

$$(2) \qquad y = a, \quad z = mx + n;$$

la condition pour qu'elle rencontre l'hélice est

$$(3) \qquad r\sin\varphi = a, \quad \frac{h}{2\pi}\varphi = mr\cos\varphi + n.$$

Supposons que l'on ait éliminé φ, on aura une relation

$$\varpi(a, n) = 0;$$

en éliminant a et n entre cette équation et (2), on aura l'équation du cylindre parallèle à la droite (2) passant par l'hélice, ou

$$\varpi(y, z - mx) = 0.$$

Ainsi ce cylindre s'obtient en éliminant a, n, φ entre (2) et (3).

Éliminons d'abord a et n, nous aurons

$$y = r\sin\varphi, \qquad z - \frac{h}{2\pi}\varphi = m(x - r\cos\varphi).$$

Si maintenant on veut avoir la trace du cylindre sur le plan des xy, il faudra faire $z = 0$, ce qui donnera les équations

$$y = r\sin\varphi, \qquad x = r\cos\varphi - \frac{h}{2\pi m}\varphi.$$

Je dis que ces équations sont celles d'une cycloïde allongée ou raccourcie : en effet, transportons l'origine au point dont les coordonnées sont 0 et $\frac{h}{2\pi m}$, nous aurons

$$y = -\frac{h}{2\pi m} + r\sin\varphi$$
$$x = -\frac{h}{2\pi m}\varphi + r\cos\varphi;$$

changeons x en $-x$, y en $-y$, il viendra finalement

$$x = \frac{h}{2\pi m}\varphi - r\cos\varphi,$$
$$y = \frac{h}{2\pi m} - r\sin\varphi.$$

Ce sont bien les équations d'une cycloïde allongée ou raccourcie.

Si l'on prend

$$\frac{h}{2\pi m} = r \qquad \text{ou} \qquad m = \frac{h}{2\pi r},$$

on aura une cycloïde proprement dite. Or l'équation de la projection de l'hélice sur le plan des zx est

$$z = \frac{h}{2\pi}\arccos\frac{x}{r}.$$

On en déduit

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{h}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

et, pour $x = 0$,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{h}{2\pi r} = -m.$$

L'inclinaison qui donne la cycloïde est donc facile à construire. Elle est, comme l'on voit, parallèle à la tangente à l'hélice (il ne faut pas oublier, en effet, que l'on a changé x en $-x$).

XXIV. — Théorèmes de Puiseux et de M. Bertrand.

Théorème de Puiseux. — *Toute courbe dont les deux courbures sont constantes est une hélice ordinaire.*

On a, en effet, en nous servant des notations employées plus haut,

$$\frac{da'}{ds} = -\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right);$$

c'est une des formules de Serret. Or, si R et T sont constants, la différentiation donne

$$\frac{d^2 a'}{ds^2} = -\frac{a'}{R^2} - \frac{a'}{T^2},$$

et, en posant $\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{1}{k^2}$,

$$\frac{d^2 a'}{ds^2} = -\frac{a'}{k^2};$$

d'où

$$2\frac{da'}{ds}\frac{d^2 a'}{ds^2} = -2\frac{a'}{k^2}\frac{da}{ds}$$

et

$$\left(\frac{da'}{ds}\right)^2 = -\frac{a'^2}{k^2} + h,$$

h désignant une constante. On en déduit

$$\frac{1}{k\sqrt{h}}\frac{da'}{\sqrt{1-\frac{a'^2}{hk^2}}}=\frac{ds}{k}$$

et, par suite,

$$\arcsin\frac{a'}{k\sqrt{h}}=\frac{s}{k}+p,$$

p désignant une constante

On en tire

$$a'=k\sqrt{h}\left(\cos p\sin\frac{s}{k}+\sin p\cos\frac{s}{k}\right);$$

on aurait deux formules analogues pour calculer b' et c', à savoir

$$b'=k\sqrt{i}\left(\cos q\sin\frac{s}{k}+\sin q\cos\frac{s}{k}\right),$$

$$c'=k\sqrt{j}\left(\cos r\sin\frac{s}{k}+\sin r\cos\frac{s}{k}\right).$$

On doit conclure de là $a'^2+b'^2+c'^2=1$, quel que soit s; donc

$$(a)\quad\left\{\begin{aligned}1=&\sum(k\sqrt{h}\cos p)^2\sin^2\frac{s}{k}+2\sum(k\sqrt{h})^2\sin\frac{s}{k}\cos\frac{s}{k}\sin p\cos p\\&+\sum(k\sqrt{h}\sin p)^2\cos^2\frac{s}{k};\end{aligned}\right.$$

en particulier, pour $s=0$, on a

$$k^2h\sum\sin^2 p=1,$$

ce qui suppose que $k\sqrt{h}\sin p$, $k\sqrt{h}\sin q$, $k\sqrt{h}\sin r$ sont les cosinus des trois angles que fait une même droite avec des axes rectangulaires. On en dirait autant de $k\sqrt{h}\cos p$, etc.; la formule (a) donne alors

$$0=\sum(k\sqrt{h})^2\sin p\cos p.$$

Donc les deux droites en question sont rectangulaires, et l'on

peut poser, en donnant une nouvelle signification à p, q, r, et en appelant p', q', r' de nouvelles constantes,

$$a' = \cos p \cos\frac{s}{k} + \cos p' \sin\frac{s}{k},$$

$$b' = \cos q \cos\frac{s}{k} + \cos q' \sin\frac{s}{k},$$

$$c' = \cos r \cos\frac{s}{k} + \cos r' \sin\frac{s}{k}.$$

Si l'on observe alors que $a' = \mathrm{R}\,\frac{d^2x}{ds^2}, \ldots,$ on aura

$$\mathrm{R}\,\frac{d^2x}{ds^2} = \cos p \cos\frac{s}{k} + \cos p' \sin\frac{s}{k},$$

$$\mathrm{R}\,\frac{dx}{ds} = + k \cos p \sin\frac{s}{k} - k \cos p' \cos\frac{s}{k} + \mathrm{A},$$

A désignant une constante; mais $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$ doit faire l'unité; donc, en raisonnant comme tout à l'heure, on voit que A est le produit par $\sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}$ d'un cosinus $\cos p''$ relatif à une droite perpendiculaire aux deux droites déjà considérées. On en conclut de nouveau

$$\mathrm{R}x = - k^2 \cos p \cos\frac{s}{k} - k^2 \cos p' \sin\frac{s}{k} + k^2 \cos p'' s \sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2},$$

....

Si nous prenons pour axes de coordonnées les trois droites rectangulaires définies par les angles p, p', p'', q, q', q'', r, r', r'', nous aurons, en appelant X, Y, Z les nouvelles coordonnées,

$$\frac{\mathrm{RX}}{k^2} = \cos\frac{s}{k}, \qquad \mathrm{R}\,\frac{\mathrm{Y}}{k^2} = \sin\frac{s}{k}, \qquad \frac{\mathrm{RZ}}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - k^2}} = s;$$

ce sont bien les équations d'une hélice.

Théorème de M. Bertrand. — *Quand le rapport des deux courbures d'une courbe est constant, cette courbe est une hélice tracée sur un cylindre à base quelconque.*

Comme on a

$$\frac{da}{ds} = \frac{a'}{R}, \qquad \frac{da''}{ds} = \frac{a'}{T},$$

on en déduit

$$\frac{da}{da''} = \frac{db}{db''} = \frac{dc}{dc''} = \frac{1}{k},$$

k désignant le rapport constant des courbures, ou

$$da'' - k\,da = 0, \qquad \ldots;$$

d'où l'on tire

$$a'' - ak = \text{const.}, \qquad \ldots.$$

Si l'on ajoute les équations analogues à celle-ci après les avoir élevées au carré, on voit que la somme des carrés des seconds membres doit faire $1 + k^2$. On posera donc

$$a'' - ak = p\sqrt{1+k^2}, \quad b'' - bk = q\sqrt{1+k^2}, \quad c'' - ck = r\sqrt{1+k^2},$$

p, q, r désignant les trois cosinus directeurs d'une droite arbitraire. Prenons cette droite pour axe des z, nous aurons

$$a'' = ak, \qquad b'' = bk, \qquad c'' = ck + \sqrt{1+k^2}.$$

En élevant ces équations au carré et en les ajoutant, on trouve

$$1 = k^2 + 2ck\sqrt{1+k^2} + 1 + k^2$$

ou

$$c = -\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad c'' = -\frac{k^2}{\sqrt{1+k^2}} + \sqrt{1+k^2}.$$

Ainsi c et c'' sont constants et, par suite, la tangente et la binormale font des angles constants avec une même droite. De $c = \text{const.}$ on déduit

$$\frac{dz}{ds} = h,$$

h désignant une constante. Cette formule peut s'écrire

$$\frac{dz^2}{ds^2} = h^2.$$

ou bien

$$\frac{dz^2}{ds^2 - dz^2} = \frac{h^2}{h^2 - 1}.$$

Si l'on prend alors pour variable l'arc

$$d\sigma = \sqrt{ds^2 - dz^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

de la base du cylindre projetant la courbe sur le plan des xy, on a

$$\frac{dz^2}{d\sigma^2} = \frac{h^2}{h^2 - 1}$$

ou

$$dz = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}\, d\sigma;$$

ainsi

$$z = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}\, \sigma + \text{const.}$$

L'ordonnée varie donc proportionnellement à l'abscisse curviligne, et, par suite, la courbe est une hélice tracée sur un cylindre quelconque.

XXV. — Sur les courbes sphériques.

Lorsqu'une courbe est tracée sur une sphère, cette sphère est sa sphère osculatrice et, en appelant ρ son rayon, on a

$$\rho^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Si l'on suppose R constant, on a $\left(\frac{dR}{ds}\right) = 0$ et $\rho = R$. Mais on peut avoir aussi $T = \infty$, et alors la courbe est plane.

Si $R = \rho$, il y a doute; mais il est facile de prouver que sur la sphère *toutes* les courbes de courbure constante sont des cercles, comme il suit.

Les équations qui déterminent le centre de la sphère osculatrice sont celles de trois plans normaux voisins, ou

$$a(X-x)+b(Y-y)+c(Z-z)=0,$$
$$a'(X-x)+b'(Y-y)+c'(Z-z)=R,$$
$$a''(X-x)+b''(Y-y)+c''(Z-z)=T\frac{dR}{ds}.$$

Faisons $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; en plaçant l'origine au centre de la sphère osculatrice, supposons $\frac{dR}{ds}=0$, $R=\rho$; nous aurons

$$x=-\rho a', \quad y=-\rho b', \quad z=-\rho c'$$

ou

$$x=-\rho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad y=-\rho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad z=-\rho\frac{d^2z}{ds^2}$$

et, en éliminant ρ,

$$y\,d^2x-x\,d^2y=0, \quad \ldots,$$

ce qui revient à

$$z\,dy-y\,dz=A\,ds,$$
$$x\,dz-z\,dx=B\,ds,$$
$$y\,dx-x\,dy=C\,ds.$$

De ces équations on tire, en multipliant la première par x, les autres par y et z, et en ajoutant,

$$Ax+By+Cz=0,$$

ce qui prouve bien que la courbe est plane.

XXVI. — Formules de M. Hesse pour le plan osculateur.

M. Otto Hesse a fait connaître une forme assez condensée de l'équation du plan osculateur d'une courbe ou de son rayon de courbure; quand cette courbe est donnée par l'intersection de deux surfaces rapportées à des coordonnées tétraédriques ou homogènes

(1) $$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0, \quad \psi(x_1, x_2, x_3, x_4)=0,$$

on a entre les coordonnées la relation

$$(2)\qquad \sum \alpha_i x_i = \mathrm{V},$$

où α_1, α_2, α_3, α_4 désignent les faces du tétraèdre de référence et V le triple de son volume. Soient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_i, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \psi_i,$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi_{ij}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = \psi_{ij};$$

l'équation d'un plan passant par la tangente à la courbe est de la forme

$$(3)\qquad \frac{\sum \mathrm{X}_i \varphi_i}{\lambda} = \frac{\sum \mathrm{X}_i \psi_i}{\mu};$$

c'est l'équation d'un plan passant par le point $x_1, \ldots, x_4$ et par le point $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, ... Si l'on exprime qu'il passe par le point $x_1 + dx_1 + \frac{1}{2} d^2 x_1$, $x_2 + \ldots$, ou que la distance du point $x_1 + \Delta x_1$, $x_2 + \Delta x_2$, ... est du troisième ordre, on a, pour déterminer $\lambda : \mu$, l'équation

$$\frac{\sum \varphi_i d^2 x_i}{\lambda} = \frac{\sum \psi_i d^2 x_i}{\mu};$$

λ et μ ou plutôt leur rapport est déterminé. Nous pouvons prendre

$$(4)\qquad \lambda = \sum \varphi_i d^2 x_i, \qquad \mu = \sum \psi_i d^2 x_i;$$

mais nous allons nous débarrasser des différentielles et nous observerons que l'on a

$$(5)\qquad \sum \varphi_i dx_i = 0, \qquad \sum \psi_i dx_i = 0,$$

$$(6)\qquad \sum \varphi_i d^2 x_i + \sum \varphi_{ij} dx_i dx_j = 0, \quad \sum \psi_i d^2 x_i + \sum \psi_{ij} dx_i dx_j = 0.$$

Enfin la formule (2) donne

$$(7) \qquad \sum \alpha_i dx_i = 0.$$

A l'aide des formules (6), les formules (4) peuvent s'écrire, en négligeant le signe, ce qui finalement n'a pas d'influence,

$$(8) \qquad \lambda = \sum \varphi_{ij} dx_i dx_j, \qquad \mu = \sum \psi_{ij} dx_i dx_j.$$

Des formules (5) et (7), il s'agit maintenant de tirer dx_2, dx_3, dx_4 pour les porter dans (8), en négligeant dans λ et μ un facteur qui leur sera commun. On aura

$$\lambda = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \varphi_1 & \psi_1 & \alpha_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \varphi_2 & \psi_2 & \alpha_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \varphi_3 & \psi_3 & \alpha_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & \varphi_4 & \psi_4 & \alpha_4 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Avant d'écrire la valeur de μ, simplifions celle de λ. Pour cela, multiplions la première colonne par x_1, la seconde par x_2, la troisième par x_3, la quatrième par x_4, la cinquième par $-(m-1)$ (m désignant le degré de la fonction homogène φ); ajoutons ces colonnes pour en faire la cinquième; procédons de même sur les lignes; ayant ensuite égard au théorème des fonctions homogènes, nous ramenons notre déterminant à la forme

$$\lambda = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \psi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \psi_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \psi_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & \psi_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & 0 \end{vmatrix} \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4}{m-1}.$$

Si nous désignons ce déterminant par le signe $H(\varphi, \psi)$ (c'est

le hessien de la fonction φ, bordé avec les coefficients du plan $X_1\psi_1 + X_2\psi_2 + X_3\psi_3 + X_4\psi_4 = 0$), nous aurons

$$(9) \qquad (m-1)^2 \frac{\sum X_i\varphi_i}{H(\varphi, \psi)} = (n-1)^2 \frac{\sum X_i\psi_i}{H(\psi, \varphi)}$$

pour l'équation cherchée du plan osculateur. Nous supposons la fonction ψ de degré n.

EXERCICES ET NOTES.

1. Le cercle osculateur d'une courbe sphérique est sur la sphère qui contient cette courbe. (Démontrer directement sans faire usage de la considération de la sphère osculatrice.)

2. Si une courbe A a son rayon de courbure constant, le lieu de ses centres de courbure B aura aussi son rayon de courbure constant; le lieu des centres de courbure de la courbe B sera la courbe A.

3. Soient

$$x = \varphi(\theta), \qquad y = \chi(\theta), \qquad z = \psi(\theta)$$

les équations d'une courbe gauche A; soient X, Y, Z les coordonnées d'une autre courbe B, telle que

$$\frac{dX}{d^2y\,dz - d^2z\,dy} = \frac{dY}{d^2z\,dx - d^2x\,dz} = \frac{dZ}{d^2x\,dy - d^2y\,dx} = N.$$

Le plan osculateur et le plan normal de la courbe A seront respectivement le plan normal et le plan osculateur de la courbe B. Soient r et t les rayons de courbure et de torsion de la courbe A; R et T ceux de la courbe B; on aura

$$R = N\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\theta^2}\,\frac{t}{r},$$

$$T = N\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{d\theta^2}.$$

(Composition donnée par M. Hermite aux élèves de l'École Polytechnique, 1873.)

4. Démontrer :

1° Que toute courbe plane S tracée sur un plan horizontal peut être considérée comme l'ombre d'une certaine surface de révolution R dont l'axe est vertical, éclairée par des rayons que l'on supposera parallèles.

2° La développée de la courbe S est alors l'ombre du conoïde ayant pour axe l'axe de la surface de révolution R, pour plan directeur le plan horizontal et pour directrice la courbe d'ombre propre de la surface de révolution. (DUNESME.)

5. Si les génératrices d'une surface développable tournent d'un même angle autour d'une trajectoire orthogonale T [1] de ces génératrices, le lieu de leurs nouvelles positions est une autre développable dont l'arête de rebroussement est sur la surface polaire de la trajectoire T.

6. Les tangentes à deux développées d'une courbe C, qui aboutissent en un même point de cette courbe, se coupent sous un angle constant.

7. On sait que, pour qu'une courbe soit plane, il faut et il suffit que son déterminant soit nul; trouver un critérium analogue pour reconnaître si une courbe est sphérique.

8. Trouver un critérium qui permette de reconnaître si une courbe peut être placée sur un cône de révolution.

Examen du cas où le cône est une sphère de rayon nul.

9. Si par les divers points d'une courbe gauche on mène les tangentes, on formera une développable; coupons cette développable par le plan osculateur en M à la courbe, l'intersection se composera d'abord de la génératrice de la développable passant en M, puis d'une certaine courbe tangente à l'arête de rebroussement. Si l'on appelle R_1 le rayon de courbure de cette courbe en M et R le rayon de l'arête de rebroussement au même point, on aura

$$R_1 = \frac{3}{4} R.$$

10. Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une courbe gauche. Si l'on désigne par des accents les dérivées prises par rapport à l'arc,

---

[1] On appelle *trajectoires orthogonales* d'une famille de courbes une autre famille de courbes coupant toutes celles-ci à angle droit.

on a, en appelant R le rayon de courbure, T le rayon de torsion,

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$
$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = \frac{1}{R^2},$$
$$x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 = \frac{1}{R^2T^2} + \frac{1 + R'^2}{R^4},$$
$$x'x''' + y'y''' + z'z''' = -\frac{1}{R^2},$$
$$x''x''' + y''y''' + z''z''' = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{R}\right)',$$
$$x'x^{\text{IV}} + y'y^{\text{IV}} + z'z^{\text{IV}} = -\frac{3}{R}\left(\frac{1}{R}\right)'.$$

11. En appelant, comme dans le texte, a, b, c les cosinus directeurs de la tangente à une courbe, a', b', c' les cosinus directeurs de la normale principale, a'', b'', c'' les cosinus directeurs de la binormale, on trouve

$$da = \frac{ds}{R}a', \qquad da' = -ds\left(\frac{a}{R} + \frac{a''}{T}\right), \qquad da'' = \frac{ds}{T}a';$$

ce sont les formules de Serret.

On a en outre

$$d^2a = -\frac{d^2s}{R}a + ds\,d\frac{1}{R}a' - \frac{ds^2}{RT}a'',$$
$$d^2a' = -ds\,d\frac{1}{R}a - ds^2\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right)a' - ds\,d\frac{1}{R}a'',$$
$$d^2a'' = -\frac{ds^2}{RT}a + ds\,d\frac{1}{T}a' - \frac{ds^2}{R^2}a'',$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les différentielles d'un ordre plus élevé ont été calculées par M. Brisse (*Annales de l'École Normale*, 1874); elles sont calculées jusqu'au sixième ordre.

12. La différence entre un arc et sa corde est donnée par la formule suivante, où R et T désignent la courbure et la torsion :

$$ds - c = \frac{ds^3}{24R^2} + \frac{ds^3}{24R}d\frac{1}{R} - \frac{ds^5}{240R^2}\left(\frac{1}{8R^2} + \frac{1}{3T^2}\right)$$
$$+ \frac{ds^3}{90}\left(d\frac{1}{R}\right)^2 + \frac{ds^3}{80R}d^2\frac{1}{R} + \dots$$

(GAVARNI.)

13. Soient h la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines d'une courbe gauche, R, T les rayons de courbure et de torsion de cette courbe, ds l'élément d'arc ; on a

$$h = \frac{ds^3}{12RT},$$

aux termes du quatrième ordre près.

14. Soient $d\eta$ l'angle sous lequel se coupent deux sphères osculatrices infiniment voisines d'une courbe gauche, ds, R, T son arc élémentaire, ses rayons de courbure et de torsion, $\frac{d\eta}{ds}$ sera en quelque sorte une troisième courbure de la courbe. Nous la désignerons par $\frac{1}{\lambda}$ et nous aurons, en appelant ρ le rayon de la sphère osculatrice,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{T\rho}\frac{d\rho}{dR}.$$

(MAGNUS DE SPARRE, *Bull. de la Soc. Statist. de l'Isère*, 1875.)

15. En conservant les notations des exercices précédents, l'angle β qu'une tangente fait avec le plan osculateur voisin sera donné par la formule

$$\beta = \frac{ds^2}{2RT};$$

donc

$$\beta = \frac{6h}{ds},$$

aux termes du troisième ordre près. (*Id.*)

16. En faisant toujours usage des notations des numéros précédents, la distance δ d'un point de la courbe à la sphère osculatrice au point infiniment voisin est donnée par la formule

$$\delta = \frac{ds^4}{24RT\lambda}. \quad (Id.)$$

17. Soit γ l'angle que la plus courte distance de deux tangentes infiniment voisines fait avec la binormale, on a (toujours avec les notations des exercices précédents)

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{ds}{T}.$$

18. L'angle g de deux normales principales infiniment voisines est (en employant les mêmes notations que dans les exercices précédents) donné par la formule

$$g = ds\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}.$$

19. La plus courte distance H de deux normales principales infiniment voisines d'une courbe est (en se servant des notations des exercices précédents) représentée par la formule

$$H = \frac{R\,ds}{\sqrt{R^2 + T^2}}.$$

20. Si, par la tangente à une courbe gauche, on fait passer un plan et que l'on projette la courbe sur ce plan, le rayon de courbure de la courbe projetée sera la projection du rayon de courbure de la courbe proposée.

21. Les normales principales d'une courbe gauche ne peuvent jamais se trouver sur une surface du second degré. (BERTRAND, *Journal de Liouville*, 1850.)

22. On appelle *hélice cylindro-conique* la courbe qui coupe sous un angle constant toutes les génératrices d'un cône de révolution : c'est une hélice tracée sur un cylindre dont la base est une spirale logarithmique. On propose d'étudier cette courbe comme on a étudié l'hélice ordinaire dans le texte. (*Voir* PAUL SERRET, *Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure.*)

CHAPITRE VI.

DES QUESTIONS QUI DÉPENDENT D'INFINIMENT PETITS D'ORDRE SUPÉRIEUR AU PREMIER DANS LES SURFACES.

I. — Des contacts des différents ordres.

On dit que deux surfaces sont tangentes en un point M, lorsqu'en ce point elles ont le même plan tangent. Alors il est facile de constater qu'une corde NN′, non parallèle au plan tangent et ne faisant pas avec lui un angle infiniment petit, est du second ordre par rapport aux lignes MN et MN′, qui sont d'ailleurs de même ordre comme côtés d'un triangle opposés à des angles finis. En effet, la ligne NN′ est égale à la somme des perpendiculaires abaissées de N et N′ sur le plan tangent respectivement multipliées par certains sinus d'angles finis; ces perpendiculaires étant du second ordre, il en sera de même de NN′.

Ainsi, en général, quand deux surfaces se touchent, leurs cordes communes sont du second ordre; mais on conçoit que l'ordre de ces cordes puisse être plus élevé. Nous regarderons alors le contact comme plus intime, et nous dirons que :

Deux surfaces ont un *contact d'ordre n* au point M, quand, menant une corde commune NN′, non parallèle au plan tangent, cette corde sera d'ordre $n+1$ par rapport à MN et MN′ (qui sont évidemment de même ordre comme côtés d'un triangle MNN′ opposés à des angles finis), quelle que soit cette corde.

Cherchons la condition pour que deux surfaces aient entre elles un contact d'ordre n. A cet effet, observons que l'on peut supposer à la corde NN′ une direction fixe; en effet, si

NN′ a une direction variable, par le point N menons une corde NP commune ayant une direction fixe, NP sera de l'ordre de NN′; car les côtés NN′ et NP du triangle NPN′ sont opposés à des angles NPN′ et NN′P finis, puisque, par hypothèse, ni NN′ ni NP ne sont parallèles au plan tangent, c'est-à-dire à aucune ligne telle que N′P faisant un angle infiniment petit avec ce plan.

On pourra alors prendre pour la corde NP la différence des z des deux surfaces, pourvu qu'en M le plan tangent ne soit pas parallèle à l'axe des z (s'il l'était, c'est sur les x ou les y des deux surfaces que l'on raisonnerait).

Pour que les deux surfaces aient un contact d'ordre n, il faudra donc, et il suffira que la différence de leurs z dans le voisinage du point de contact soit de l'ordre $n+1$. Or ces z que nous appellerons z et z' au point M se développent ainsi

$$z + dz + \frac{1}{2} d^2 z + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} d^n z + \ldots,$$

$$z' + dz' + \frac{1}{2} d^2 z' + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} d^n z' + \ldots.$$

Pour que la différence de ces quantités soit toujours d'ordre $n+1$ autour du point M, il faut que

$$z = z', \quad dz = dz', \quad d^2 z = d^2 z', \quad \ldots, \quad d^n z = d^n z'.$$

Ainsi *les différentielles des ordonnées z doivent être les mêmes jusqu'à l'ordre n inclusivement.*

Les conditions précédentes entraînent les suivantes :

$$z = z', \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial y},$$
$$\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots$$

En d'autres termes, les dérivées partielles des z jusqu'à l'ordre n inclusivement doivent être égales.

Lorsque les surfaces sont données par des équations telles que

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'(x, y, z) = 0,$$

on trouvera comme il suit les conditions du contact d'ordre n. Différentiant une première fois ces formules, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$
$$\frac{\partial f'}{\partial x}dx + \frac{\partial f'}{\partial y}dy + \frac{\partial f'}{\partial z}dz = 0;$$

on éliminera dz et l'on égalera à zéro les coefficients de dx, dy. Différentiant encore, on procédera ainsi toujours de la même façon.

Quand on veut exprimer que $f=0$, $f'=0$ ont un contact d'ordre n, on se borne généralement à différentier l'une d'elles et l'on suppose que dz, d^2z, d^3z, ... y soient remplacées par leurs valeurs déduites de l'autre équation.

Théorème. — *Deux surfaces qui ont un contact d'ordre n se coupent suivant une courbe présentant n + 1 branches réelles ou imaginaires.*

En effet, supposons les surfaces $z=\varphi$, $z=\psi$ rapportées à leur plan tangent commun pris pour plan des xy et à leur normale commune prise pour axe des z, leurs z se développeront ainsi

$$z = \varphi(0, 0) + x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_0 + \ldots,$$
$$z' = \psi(0, 0) + x\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)_0 + \ldots,$$

l'indice 0 indiquant que l'on doit supposer $x=0$, $y=0$. La différence entre z et z' étant d'ordre n, on aura

$$z - z' = \frac{1}{1.2.3\ldots(n+1)}\left\{x^{n+1}\left[\left(\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^{n+1}}\right)_0 - \left(\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial x^{n+1}}\right)_0\right] + \ldots\right\}.$$

Or, pour avoir l'intersection des deux surfaces projetée sur le plan des xy, il faut faire $z=z'$; on trouve alors

$$x^{n+1}\left[\left(\frac{\partial^{n+1}\varphi}{\partial x^{n+1}}\right)_0 - \left(\frac{\partial^{n+1}\psi}{\partial x^{n+1}}\right)_0\right] + \ldots = 0,$$

ce qui est manifestement l'équation d'une courbe possédant à l'origine un nœud à $n+1$ branches.

La réciproque est vraie, car la différence $z - z'$ égalée à zéro ne peut représenter un nœud à $n+1$ branches que si les termes du degré le moins élevé dans cette différence sont d'ordre $n+1$, c'est-à-dire que si $z - z'$ est d'ordre $n+1$. Alors les surfaces ont évidemment un contact d'ordre n.

II. — Plan osculateur.

Deux surfaces sont *osculatrices* quand, eu égard au nombre de paramètres qu'elles renferment, leur contact est de l'ordre le plus élevé.

Cherchons le plan osculateur d'une surface

$$f(x, y, z) = 0;$$

l'équation d'un plan est

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0;$$

elle renferme trois paramètres. On pourra l'assujettir à trois conditions, différentions-la, nous aurons

$$(2) \qquad A + Cq = 0,$$

$$(3) \qquad B + Cp = 0;$$

dans les formules (1), (2), (3), nous supposerons qu'à la place de z, p, q on ait pris leurs valeurs déduites de $f(x, y, z) = 0$; ces formules (1), (2), (3) feront alors connaître les rapports A : B : C : D et, en les portant dans

$$AX + BY + CZ + D = 0,$$

on aura l'équation du plan osculateur, lequel a avec la surface un contact de premier ordre. On trouve

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y);$$

c'est l'équation du plan tangent, on devait s'y attendre.

Soient r, s, t les dérivées secondes de z; en différentiant encore (2) et (3) et en remplaçant toujours les dérivées de z par celles déduites de l'équation de la surface, on a

$$Cr = 0, \qquad Cs = 0, \qquad Ct = 0,$$

ou

$$r = 0, \qquad s = 0, \qquad t = 0.$$

Quand ces conditions se trouveront satisfaites d'elles-mêmes, ce qui aura lieu en certains points particuliers analogues aux points d'inflexion des courbes, le plan tangent aura un contact d'ordre plus élevé, il sera *surosculateur* et coupera la surface suivant une courbe à trois branches.

III. — Sphère osculatrice. — Ombilics.

Cherchons s'il est possible d'établir un contact du second ordre entre une surface donnée et une sphère. L'équation de la sphère est

$$(1) \qquad (X - \alpha)^2 + (Y - \beta)^2 + (Z - \gamma)^2 = R^2,$$

exprimant que le point (x, y, z) de la surface appartient à la sphère; on a

$$(2) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

Différentions cette formule par rapport à x et y, nous aurons, en supposant le p et le q remplacés par ceux de la surface,

$$(3) \qquad x - \alpha + p(z - \gamma) = 0,$$

$$(4) \qquad y - \beta + q(z - \gamma) = 0;$$

les formules (2), (3), (4), au nombre de trois, ne déterminent pas tous les paramètres α, β, γ, R, et l'on peut écrire entre eux encore une relation; mais, pour établir un contact

du second ordre, il faudrait encore trois relations obtenues en différentiant (3) et (4), à savoir

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 + r(z-\gamma) + p^2 &= 0,\\ s(z-\gamma) + pq &= 0,\\ 1 + t(z-\gamma) + q^2 &= 0,\end{aligned}\right.$$

en sorte qu'il n'existera pas en général de sphère ayant un contact d'ordre supérieur au premier.

Cependant en certains points, que l'on a appelés *ombilics*, les formules (5) peuvent être accidentellement satisfaites, et servir concurremment avec (1), (2), (3), (4) à la détermination de α, β, γ, R; on a alors

$$(6)\qquad -(z-\gamma) = \frac{pq}{s} = \frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t},$$

$$-(x-\alpha) = p(z-\gamma),$$
$$-(y-\beta) = q(z-\gamma),$$

$$R^2 = (z-\gamma)^2(1+p^2+q^2).$$

La condition pour qu'il existe un ombilic en x, y, z est d'ailleurs donnée par les relations (6) entre p, q, r, s, t, à savoir

$$(7)\qquad \frac{pq}{s} = \frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t}.$$

Nous retrouverons ces équations plus loin, comme conséquences d'une autre théorie.

Les équations (7) jointes à celles de la surface déterminent les ombilics; on voit que toute surface possède en général des ombilics réels ou imaginaires. Quelques surfaces possèdent des lignes *ombilicales,* c'est-à-dire dont tous les points sont des ombilics. Enfin la sphère est la seule surface réelle dont tous les points soient des ombilics, comme nous le prouverons tout à l'heure.

Pour qu'il existe une ligne ombilicale, il faut que les équations (7) se réduisent à une, et, pour que tous les points soient des ombilics, il faut que les formules (7) soient identiques.

IV. — Surfaces dont tous les points sont des ombilics.

Il est facile de prouver que la sphère est la seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics. En effet, si tous les points d'une surface sont des ombilics, les formules (7) du paragraphe précédent, d'après ce que nous venons de dire, sont identiques, et, en observant que $s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, on peut les écrire

$$\frac{\partial p}{\partial y} : pq = \frac{\partial q}{\partial x} : pq = \frac{\partial p}{\partial x} : (1+p^2) = \frac{\partial q}{\partial y} : (1+q^2)$$

ou

$$(8) \qquad \frac{p\dfrac{\partial p}{\partial x}}{1+p^2} = \frac{1}{q}\,\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$(9) \qquad \frac{q\dfrac{\partial q}{\partial y}}{1+q^2} = \frac{1}{p}\,\frac{\partial p}{\partial y};$$

on en conclut, ce que l'on vérifie en différentiant,

$$(10) \qquad \begin{cases} \log\sqrt{1+p^2} = \log q + \log\sqrt{\varphi(y)}, \\ \log\sqrt{1+q^2} = \log p + \log\sqrt{\psi(x)}, \end{cases}$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires. Il faut faire attention que ces fonctions jouent le rôle de constantes. En effet, dans l'équation (8), y, ainsi que ses fonctions, sont regardées comme des constantes.

Les formules (10) peuvent s'écrire, en repassant des logarithmes aux nombres,

$$(10\ bis) \qquad \begin{cases} 1+p^2 = q^2\varphi(y), \\ 1+q^2 = p^2\psi(x), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad p = \sqrt{\frac{\varphi+1}{\varphi\psi-1}}, \qquad q = \sqrt{\frac{\psi+1}{\varphi\psi-1}}.$$

Si l'on écrit que l'on a $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$, on trouve

$$\frac{\varphi'(\varphi\psi - 1) - \varphi'\psi(\varphi + 1)}{\sqrt{\varphi + 1}} = \frac{\psi'(\varphi\psi - 1) - \psi'\varphi(\psi + 1)}{\sqrt{\psi + 1}}$$

ou, réductions faites,

$$\frac{\varphi'}{(\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\psi'}{(\psi + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour qu'une fonction $F(x)$ jouisse de la propriété

$$F(x) = F_1(y),$$

quels que soient x et y, il faut que $F(x)$ soit constant; par suite, en appelant $2c$ une constante, on a

$$\frac{\varphi'(y)}{[\varphi(y) + 1]^{\frac{3}{2}}} = 2c;$$

le premier membre de cette formule est la dérivée de $\frac{-2}{\sqrt{\varphi(y)+1}}$; on a donc, en observant que $2c$ est la dérivée de $2cy$ et en appelant $2c'$ une nouvelle constante,

$$\frac{-2}{\sqrt{\varphi(y)+1}} = 2cy + 2c'$$

ou bien

$$\varphi(y) = \frac{1}{(cy + c')^2} - 1;$$

de même

$$\psi(x) = \frac{1}{(cx + c'')^2} - 1,$$

c'' désignant une nouvelle constante; si l'on porte ces valeurs dans les formules (11), on trouve

$$p = \pm\sqrt{\frac{(cx + c'')^2}{1 - (cx + c'')^2 - (cy + c')^2}}, \qquad q = \ldots,$$

et, par suite,

$$dz = p\,dx + q\,dy = \frac{(cx + c'')\,dx + (cy + c')\,dy}{\pm\sqrt{1 - (cx + c'')^2 - (cy + c')^2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$c\,dz = d\left[\pm\sqrt{1-(cx+c'')^2-(cy+c')^2}\right].$$

On a donc, en appelant h une constante,

$$z+h=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\left(x+\frac{c''}{c}\right)^2-\left(y-\frac{c'}{c}\right)^2}$$

ou

$$(z+h)^2+\left(x+\frac{c''}{c}\right)^2+\left(y+\frac{c'}{c}\right)^2=\frac{1}{c^2};$$

c'est l'équation d'une sphère. Mais on peut encore satisfaire aux formules (10 *bis*) en prenant $\varphi(y)=\psi(x)=-1$; elles deviennent alors

$$p^2+q^2+1=0,$$

ce qui est l'équation générale des développables isotropes (p. 316).

Il résulte de là que la sphère est la seule surface réelle dont tous les points sont des ombilics, mais nous voyons qu'elle partage cette propriété avec les sphères imaginaires et avec les développables isotropes.

V. — De la courbure des surfaces.

La courbure d'une surface est une notion complexe, et elle ne peut pas se mesurer par un seul nombre, comme on le fait pour les courbes. On donne une notion nette de la courbure d'une surface en définissant la loi suivant laquelle varient les courbures des sections normales autour d'un même point. Cette loi est assez simple pour permettre, comme nous allons voir, de définir la courbure à l'aide de deux éléments seulement.

Rapportons une surface à son plan tangent et à sa normale prise pour axe des z; son équation sera de la forme

$$(1)\qquad z=\tfrac{1}{2}(r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2)+\ldots;$$

en effet, en développant z par la formule de Taylor, le terme

indépendant de x et y sera nul, puisque pour $x=0$, $y=0$, on doit avoir $z=0$; les coefficients de x et y sont nuls, puisqu'ils sont les coefficients directeurs $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ du plan tangent; r_0, s_0, t_0 désignent alors les valeurs de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ pour $x=0$, $y=0$, $z=0$.

La courbure d'une courbe, rappelons-le, est égale au double de la distance d'un point de la courbe à la tangente au point infiniment voisin, divisée par le carré de l'arc, ou, ce qui revient au même, de la distance du point à la normale. Si bien que la courbure d'une courbe tangente à l'axe des x à l'origine des coordonnées est $\lim \frac{2y}{x^2}$ (p. 369).

Ceci posé, l'équation d'une section normale de la surface faite par le plan

$$y = x \tang \alpha$$

s'obtiendra en observant que, dans l'équation (1), il suffit de remplacer x par $X\cos\alpha$ et y par $X\sin\alpha$; X désignera alors l'abscisse d'un point de la section dans son plan comptée sur le plan des xy. Cette section a donc pour équation

$$z = \frac{X^2}{2}(r_0 \cos^2\alpha + 2s_0 \sin\alpha\cos\alpha + t_0 \sin^2\alpha) + \ldots;$$

la courbure de cette section, ou la limite de $\frac{2z}{X^2}$, sera donnée par la formule

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = r_0 \cos^2\alpha + 2s_0 \sin\alpha\cos\alpha + t_0 \sin^2\alpha.$$

La courbure d'une section normale varie, comme l'on voit, de la même façon que l'inverse du carré du rayon vecteur de la conique représentée par l'équation

$$r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2 = 1.$$

On a donné à cette conique le nom d'*indicatrice*. On voit qu'elle a son centre à l'origine.

Voici maintenant les conséquences de cette théorie :

1° *On peut toujours diriger les axes de manière à faire évanouir le terme en xy, c'est-à-dire le* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *de la surface en même temps que* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Il suffit pour cela de prendre, pour axes de coordonnées, les axes de l'indicatrice et la normale à la surface.

2° Les plans qui passent par la normale et les axes de l'indicatrice s'appellent *plans principaux, sections principales; dans ces sections* R *est maximum ou minimum.*

3° *La somme des courbures de deux sections rectangulaires est constante.*

En effet, la somme des carrés des inverses de deux diamètres rectangulaires dans l'ellipse ou l'hyperbole est constante.

Ces propositions, qui résultent des propriétés de l'ellipse et de l'hyperbole, pourraient se déduire de la discussion de la formule (2) où elles sont en évidence.

Les rayons de courbure des sections principales portent le nom de *rayons de courbure principaux.* Avant de montrer comment on peut les calculer directement et sans transformation de coordonnées, pour un point quelconque d'une surface, nous énoncerons quelques propriétés de l'indicatrice.

L'indicatrice est la limite d'une courbe semblable à la section faite dans la surface par un plan qui se rapproche indéfiniment du plan tangent, en lui restant parallèle.

En effet, rapportons toujours la surface à son plan tangent et à sa normale, l'équation de la surface sera de la forme

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \frac{\Sigma}{2},$$

Σ désignant des termes du troisième ordre en x, y. Coupons par le plan $z = \frac{h}{2}$, la section aura pour équation

$$h = r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 + \Sigma,$$

ou

$$1 = r_0\left(\frac{x}{\sqrt{h}}\right)^2 + 2s_0\frac{x}{\sqrt{h}}\frac{y}{\sqrt{h}} + t_0\left(\frac{y}{\sqrt{h}}\right)^2 + \frac{\Sigma}{h}.$$

On aura une courbe semblable à celle-ci en posant

$$\frac{x}{\sqrt{h}} = \mathrm{X}, \qquad \frac{y}{\sqrt{h}} = \mathrm{Y},$$

et alors $\frac{\Sigma}{h}$ tend vers zéro, si l'on suppose que X et Y conservent des valeurs finies; à la limite, cette courbe, semblable à la section en question, sera représentée par l'équation

$$1 = r_0\mathrm{X}^2 + 2s_0\mathrm{XY} + t_0\mathrm{Y}^2;$$

c'est l'indicatrice.

Remarque. — Il est bon d'observer, toutefois, que, si le plan tangent au point considéré était surosculateur, quoiqu'il n'y eût point là à proprement parler de point singulier, nos conclusions tomberaient en défaut. La section par un plan infiniment voisin du plan tangent serait en général du troisième degré et pourrait être d'un degré supérieur; car alors on aurait $r_0 = 0$, $s_0 = 0$, $t_0 = 0$, et il faudrait avoir égard aux termes du troisième ou du quatrième ordre.

Nous avons dit qu'un plan tangent coupait la surface suivant une courbe à nœud; cette courbe a pour équation

$$0 = \tfrac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + \ldots;$$

l'ensemble des tangentes au nœud a pour équation

$$r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2 = 0;$$

ce sont les asymptotes de l'indicatrice, ainsi :

Les tangentes au nœud de la courbe provenant de l'intersection d'une surface par son plan tangent sont asymptotes de l'indicatrice relative à ce point.

Cette proposition est encore vraie quand le plan tangent est surosculateur, pourvu que l'on appelle alors indicatrice

la courbe semblable à la section de la surface par un plan infiniment voisin du plan tangent et parallèle à ce plan.

Les dérivées secondes de z, en un point déterminé d'une surface, peuvent passer par toutes les valeurs possibles. Il en résulte que l'indicatrice peut affecter toutes les formes des coniques à centre, depuis l'hyperbole la plus ouverte jusqu'à l'ellipse infiniment aplatie, ou système de deux droites parallèles.

Quand l'indicatrice est elliptique, le paraboloïde osculateur $2z = r_0 x^2 + 2s_0 xy + t_0 y^2$ est elliptique, le plan tangent ne *coupe pas* la surface, le nœud étant ici un point isolé, puisque les tangentes au nœud ou les asymptotes de l'indicatrice sont imaginaires. Les rayons de courbure principaux sont de même sens.

Quand l'indicatrice est hyperbolique, le paraboloïde osculateur est hyperbolique, le plan tangent *coupe* la surface, les asymptotes de l'indicatrice sont les tangentes au nœud, qui est réel. La surface n'est pas *convexe*, on dit qu'elle est à *courbures opposées*. Les rayons de courbure principaux sont de sens opposés; deux rayons de courbure sont infinis.

Quand l'indicatrice est parabolique, le paraboloïde osculateur devient un cylindre parabolique, le plan tangent coupe encore la surface; la section présente alors ordinairement un rebroussement. Ce cas est caractérisé par la formule

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0.$$

Tous les points d'une surface développable sont des points pour lesquels l'indicatrice est parabolique. L'un des rayons de courbure principaux est infini.

Remarquons enfin que les sections normales passant par les asymptotes de l'indicatrice ont des rayons de courbure infinis; par suite, le point de contact est pour elles un point d'inflexion.

VI. — Équation simplifiée de l'indicatrice.

La courbure $\frac{1}{\rho}$ d'une section normale tracée sur une surface peut, comme on l'a vu tout à l'heure, se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\rho} = r_0 \cos^2\alpha + 2 s_0 \sin\alpha \cos\alpha + t_0 \sin^2\alpha,$$

α désignant l'angle que fait la tangente à la section avec l'axe des x. Si l'on prend les sections principales pour plans des xz et des yz, alors $s_0 = 0$, et l'on a

$$\frac{1}{\rho} = r_0 \cos^2\alpha + t_0 \sin^2\alpha;$$

r_0 et t_0 sont alors les inverses des rayons de courbure principaux que nous appellerons $\frac{1}{R}$ et $\frac{1}{R'}$; en effet, pour $\alpha = 0$, on a $r_0 = \frac{1}{\rho}$ et, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $t_0 = \frac{1}{\rho}$, en sorte que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\alpha}{R} + \frac{\sin^2\alpha}{R'}.$$

Si l'on appelle ρ' le rayon de courbure de la section normale dans la direction rectangulaire, on trouve

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\sin^2\alpha}{R} + \frac{\cos^2\alpha}{R'},$$

d'où l'on tire, ce que l'on savait,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

L'équation de l'indicatrice peut s'écrire

$$\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R'} = 1.$$

Soient α et α' deux directions conjuguées par rapport à l'indicatrice, on aura

$$\tang\alpha \tang\alpha' = -\frac{R'}{R}$$

et, en appelant ρ' le rayon de courbure correspondant à la directrice α',

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2\alpha'}{R} + \frac{\sin^2\alpha'}{R};$$

d'où l'on conclut

$$\rho + \rho' = R + R'.$$

VII. — Théorème de M. Bertrand.

Nous appellons *courbure* d'une surface, au point $M(x, y, z)$ et dans la direction dx, dy, dz, le rapport

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho_1},$$

$d\varepsilon$ désignant l'angle que fait la normale à la surface en M avec la normale en $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, et ds désignant l'arc $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ qui joint ces deux points.

Rapportons la surface à sa normale et à son plan tangent en M; la normale en un point quelconque infiniment voisin de l'origine (x, y, z) a pour équations

$$X - x + p(Z - z) = 0,$$
$$Y - y + q(Z - z) = 0;$$

l'angle ε de cette normale avec l'axe des z est donné par la formule

$$1 : \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \cos\varepsilon.$$

Or on peut poser

$$z = \frac{1}{2}(r_0x^2 + 2s_0xy + t_0y^2) + \ldots,$$

r_0, s_0, t_0, ... désignant $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ... pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. On en tire

$$p = r_0x + s_0y, \qquad q = s_0x + t_0y$$

VIII. — Recherche des rayons de courbure principaux

Soit maintenant

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface donnée; proposons-nous de calculer ses rayons de courbure principaux au point dont les coordonnées sont x, y, z. Posons une fois pour toutes

$$(2) \quad \begin{cases} f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}, & f_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}, & f_3 = \dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ f_{11} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, & f_{12} = f_{21} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, & f_{13} = f_{31} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \\ f_{22} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, & f_{23} = f_{32} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, & f_{33} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Soient $x' = \dfrac{dx}{ds}, y' = \dfrac{dy}{ds}, z' = \dfrac{dz}{ds}$ les trois cosinus directeurs d'une tangente à la surface, passant par le point (x, y, z). Par cette tangente faisons passer une section normale et calculons son rayon de courbure. Au lieu d'appliquer les formules générales, nous ferons usage de l'artifice qui suit :

Menons deux plans normaux, infiniment voisins, à la courbe de section dont nous voulons calculer le rayon de courbure; ces plans se couperont, comme l'on sait, suivant l'axe du cercle osculateur (p. 378), lequel axe rencontrera le plan de la courbe de section en son centre de courbure. Nous remarquerons, pour faciliter le calcul, que le centre de courbure est sur la normale à la surface qui est la normale en x, y, z à la section. Nous aurons donc, pour déterminer les coordonnées du centre de courbure X, Y, Z et le rayon R de courbure, les équations suivantes :

$$(3) \qquad (X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0,$$

équation du plan normal;

$$(4) \qquad (X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' = 1,$$

équation obtenue en différentiant par rapport à s l'équation précédente : ces deux équations représentent, comme on l'a vu, l'axe du cercle osculateur (¹); enfin

$$(5) \qquad \frac{X-x}{f_1} = \frac{Y-y}{f_2} = \frac{Z-z}{f_3} = \frac{R}{N},$$

équation de la normale à la surface où l'on a écrit, pour abréger, N au lieu de $\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}$ et où R représentera le rayon de courbure de la section.

L'équation (3) est contenue dans les formules (5), ce que l'on peut d'ailleurs vérifier en observant que le résultat de l'élimination de X, Y, Z ou de $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ donne l'identité

$$(6) \qquad f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0,$$

qui exprime que la direction f_1, f_2, f_3 de la normale à la surface est perpendiculaire à celle de la tangente à la section considérée x', y', z', et que l'on obtient d'ailleurs en différentiant (1) par rapport à l'arc s. Des formules (4) et (5) on tire

$$(A) \qquad X-x = \frac{f_1 R}{N}, \qquad Y-y = \frac{f_2 R}{N}, \qquad Z-z = \frac{f_3 R}{N},$$

$$(7) \qquad \frac{R}{N} = \frac{1}{f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z''}.$$

Mais, en différentiant l'équation (6) par rapport à l'arc s de la courbe dont on cherche le rayon de courbure, on a

$$f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z'' + f_{11} x'^2 + f_{22} y'^2 + f_{33} z'^2 \\ + 2 f_{23} y' z' + 2 f_{31} x' z' + 2 f_{12} x' y' = 0;$$

(¹) Soit $P = 0$ l'équation sous forme abrégée du plan normal; $P + dP = 0$ sera celle du plan normal voisin, et ces deux équations représentent l'axe du cercle osculateur; la seconde peut être remplacée par $dP = 0$, combinaison des deux équations, ou par $\frac{dP}{ds} = 0$: c'est l'équation (4) du texte.

l'équation (7) prend alors la forme suivante pour le calcul du rayon de courbure R :

$$\frac{R}{N} = \frac{-1}{f_{11}x'^2 + f_{22}y'^2 + f_{33}z'^2 + 2f_{23}y'z' + 2f_{31}x'z' + 2f_{12}x'y'}.$$

Si nous posons, pour abréger,

$$f_{11}x'^2 + f_{22}y'^2 + f_{33}z'^2 + 2f_{23}y'z' + 2f_{31}z'x' + 2f_{12}y'z' = \varphi(x', y', z'),$$

nous pourrons écrire ainsi l'équation précédente

$$\text{(7 bis)} \qquad \frac{N}{R} = -\varphi(x', y', z').$$

Pour trouver les rayons de courbure principaux, il suffit de calculer le maximum et le minimum de $\frac{N}{R}$ quand on fait varier la direction x', y', z' de la section normale. On a, pour la condition du maximum et du minimum,

$$(8) \qquad 0 = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\,dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\,dy' + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\,dz';$$

les quantités x', y', z' sont liées entre elles par les relations

$$(9) \qquad f_1 x' + f_2 y' + f_3 z' = 0 :$$

c'est la relation (6), et

$$(10) \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1\,dx' + f_2\,dy' + f_3\,dz', \\ 0 = x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz'. \end{array} \right.$$

Si l'on applique aux formules (8) et (11) la méthode des multiplicateurs, on obtient les trois formules

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial\varphi}{\partial x'} + \lambda f_1 + \mu x' = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y'} + \lambda f_2 + \mu y' = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z'} + \lambda f_3 + \mu z' = 0, \end{array} \right.$$

où λ et μ désignent deux paramètres à éliminer. En éliminant λ, μ, x', y', z' entre (7), (9), (10) et (12), on a l'équation qui fait connaître le maximum et le minimum de $\frac{N}{R}$; pour obtenir la résultante, nous éliminerons d'abord λ en multipliant la première formule (12) par x', la deuxième par y', la troisième par z'; en ajoutant et en ayant égard à (7), (8), (9) et (10), on a $\frac{2N}{R} - \mu = 0$, ou $\mu = \frac{2N}{R}$. En remplaçant alors dans (12) μ par cette valeur et $\frac{\partial\varphi}{\partial x'}, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \frac{\partial\varphi}{\partial z'}$ par leurs développements, puis en divisant par 2, on trouvera

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)x'+f_{12}y'+f_{13}z'+\frac{1}{2}\lambda f_1=0,\\ f_{12}x'+\left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)y'+f_{23}z'+\frac{1}{2}\lambda f_2=0,\\ f_{31}x'+f_{32}y'+\left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)z'+\frac{1}{2}\lambda f_3=0,\\ f_1x'+f_2y'+f_3z'=0. \end{array}\right.$$

En éliminant x', y', z', λ, on a l'équation aux rayons de courbure principaux

$$(14)\qquad \left|\begin{array}{cccc} f_{11}+\frac{N}{R} & f_{12} & f_{13} & f_1\\ f_{21} & f_{22}+\frac{N}{R} & f_{23} & f_2\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}+\frac{N}{R} & f_3\\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{array}\right| = 0.$$

$\frac{N}{R}$ une fois connu, les équations (13) feront connaître x', y', z', c'est-à-dire les directions des sections principales.

IX. — Discussion de l'équation aux rayons de courbure principaux.

Théorème I. — *L'équation* (14) *aux rayons de courbure principaux est du second degré, elle a ses deux racines réelles* (*si la surface* $f=0$ *est réelle*).

Si nous posons

$$(15) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & 0 \end{vmatrix},$$

on pourra écrire l'équation (14) ainsi

$$\frac{N^4}{R^2} - \frac{N}{R}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial f_{11}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{22}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{33}}\right) + \Theta = 0.$$

L'équation (14) est donc bien du second degré, et il est bon d'observer que Θ n'est autre chose que le hessien de f, à un facteur constant près.

Pour prouver que cette équation (14) a ses racines réelles, on remarque que, si ces racines étaient imaginaires, on en déduirait pour x', y', z', λ deux systèmes de valeurs conjuguées ; désignant le premier système de valeurs par x', y', z', λ et le second par x'', y'', z'', λ', on trouvera, en multipliant la première formule (13) par x'', la seconde par y'', la troisième par z'' et en ajoutant,

$$f_{11}x'x'' + f_{23}(z'y'' + y'z'') + \ldots = -\frac{N}{R}(x'x'' + y'y'' + z'z'');$$

le coefficient de λ disparaît en vertu de $f_1 x'' + f_2 y'' + f_3 z'' = 0$. En appelant $\frac{N'}{R'}$ la valeur conjuguée de $\frac{N}{R}$, on trouve d'une façon analogue

$$f_{11}x'x'' + f_{23}(z'y'' + y'z'') + \ldots = -\frac{N'}{R'}(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0;$$

on en tire

$$\left(\frac{N}{R} - \frac{N'}{R'}\right)(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0;$$

donc, comme $\frac{N}{R}$ est différent de $\frac{N'}{R'}$, puisqu'ils sont conjugués,

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

ce qui prouve d'abord que les directions principales sont rec-

tangulaires, et ensuite qu'elles ne sauraient être imaginaires, car $x'x'' = (\operatorname{mod} x')^2$; on aurait donc

$$(\operatorname{mod} x')^2 + (\operatorname{mod} y')^2 + (\operatorname{mod} z')^2 = 0,$$

ou $x' = y' = z' = 0$, ce qui est en contradiction avec la relation $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, à laquelle sont assujetties les quantités x', y', z'.

Problème. — *Chercher les conditions pour que l'équation* (14) *ait une racine double.*

Si nous appelons V le premier membre de cette équation, on aura à la fois

$$(16)\quad \frac{dV}{d\left(\frac{N}{R}\right)} = -\frac{\partial V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)} - \frac{\partial V}{\partial\left(f_{22} - \frac{N}{R}\right)} - \frac{\partial V}{\partial\left(f_{33} - \frac{N}{R}\right)} = 0,$$

et $V = 0$, si l'équation (14) ou $V = 0$ a des racines égales. Or on a (t. I, p. 159)

$$\begin{aligned} 0 &= V \frac{\partial^2 V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)\partial\left(f_{22} - \frac{N}{R}\right)} \\ &= \frac{\partial V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)} \frac{\partial V}{\partial\left(f_{22} - \frac{N}{R}\right)} - \left(\frac{\partial V}{\partial f_{12}}\right)^2; \end{aligned}$$

multipliant (16) par $\frac{\partial V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)}$, on trouve alors, en remplaçant $\frac{\partial V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)} \frac{\partial V}{\partial\left(f_{12} - \frac{N}{R}\right)}, \dots$ par leurs valeurs tirées de l'équation précédente et de son analogue,

$$0 = \left[\frac{\partial V}{\partial\left(f_{11} - \frac{N}{R}\right)}\right]^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial f_{12}}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial f_{13}}\right)^2.$$

Cette formule et ses analogues montrent que les mineurs de V

relatifs aux éléments qui n'appartiennent pas à la dernière ligne et à la dernière colonne sont nuls (au moins dans toute surface réelle).

En écrivant toutes ces conditions, on tire

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&2f_2f_3f_{23}-f_2^2\left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)-f_3^2\left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)=0,\\
&2f_3f_1f_{13}-f_3^2\left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)-f_1^2\left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)=0,\\
&2f_1f_2f_{12}-f_1^2\left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)-f_2^2\left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)=0,\\
&f_1^2f_{23}-f_1f_2f_{13}-f_1f_3f_{12}+\left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)f_2f_3=0,\\
&f_2^2f_{13}-f_2f_3f_{12}-f_2f_1f_{23}+\left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)f_3f_1=0,\\
&f_3^2f_{12}-f_3f_1f_{23}-f_3f_2f_{13}+\left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)f_1f_2=0.
\end{aligned}\right.$$

Si aucune des dérivées f_1, f_2, f_3 n'est nulle, l'élimination de $\frac{N}{R}$ donne

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{f_2f_3}(f_1f_2f_{13}+f_1f_3f_{12}-f_{11}f_2f_3-f_1^2f_{23})\\
&=\frac{1}{f_3f_1}(f_2f_3f_{12}+f_2f_1f_{23}-f_{22}f_1f_3-f_2^2f_{13})\\
&=\frac{1}{f_1f_2}(f_3f_1f_{23}+f_3f_2f_{13}-f_{33}f_2f_1-f_3^2f_{12})
\end{aligned}\right.$$

seulement. Et ces équations peuvent encore s'écrire

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
&f_1^3f_{23}-f_1^2(f_{13}f_2+f_{12}f_3)+f_1f_2f_3f_{11}\\
&=f_2^3f_{31}-f_2^2(f_{12}f_3+f_{23}f_1)+f_1f_2f_3f_{22}\\
&=f_3^3f_{12}-f_3^2(f_{23}f_1+f_{13}f_2)+f_1f_2f_3f_{33}.
\end{aligned}\right.$$

Si l'une des quantités f_1, f_2, f_3 est nulle, f_1 par exemple, en vertu de la quatrième équation (17), il faudra que l'une des quantités f_2, f_3 soit nulle, ou que $f_{11}+\frac{N}{R}=0$, et l'on devra reprendre le système (17) tout entier pour en faire la discussion.

Il est facile de voir que les points où les deux rayons de courbure principaux sont égaux sont des ombilics, d'abord directement au moyen des équations (18) qui se réduisent à

$$\frac{s}{pq} = \frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2}$$

et déterminent les ombilics (p. 421); ensuite en observant que, si les deux rayons de courbure principaux sont égaux, l'indicatrice est circulaire, et il existe une sphère osculatrice.

Les équations (19) permettent de compter les ombilics d'une surface de degré m. En effet les ombilics de la surface $f = 0$ sont à l'intersection de la courbe (19) et de la surface $f = 0$; la courbe (19) est elle-même l'intersection de deux surfaces de degré $4m - 5$. Il y aura donc $(4m - 5)^2 m$ points d'intersection; mais tous ces points ne sont pas des ombilics. En effet, les équations (19) sont satisfaites pour

$$(20) \quad \begin{cases} f_1 = 0 & \text{et} \quad f_2 f_{13} + f_3 f_{12} = 0, \\ f_2 = 0 & \text{et} \quad f_3 f_{12} + f_1 f_{23} = 0, \\ f_3 = 0 & \text{et} \quad f_1 f_{23} + f_2 f_{13} = 0, \end{cases}$$

bien que l'on puisse toujours supposer qu'en un ombilic on n'ait pas $f_1 = 0$ ou $f_2 = 0$ ou $f_3 = 0$ au moyen d'une transformation de coordonnées. Or les équations (20) déterminent sur la surface $f = 0$

$$3m(m-1)(2m-3)$$

points qui ne doivent pas compter parmi les ombilics; il reste donc

$$m(4m-5)^2 - 3m(m-1)(2m-3)$$

points qui pourront être des ombilics. En faisant le calcul, on constate qu'une surface d'ordre m peut avoir au plus

$$m(10m^2 - 25m + 16) \text{ ombilics.}$$

Pour $m = 2$, on trouve qu'il y a 12 ombilics. Les ombilics des surfaces du second ordre sont donc au nombre de 12 et évidemment aux extrémités des diamètres conjugués des sections circulaires. Vérifions-le.

Considérons l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Les formules (19) appliquées à ce cas donnent

$$\frac{xyz}{a^4 b^2 c^2} = \frac{xyz}{b^4 a^2 c^2} = \frac{xyz}{c^4 a^2 b^2},$$

et il semble qu'il n'y ait pas d'ombilics, les solutions $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ne devant pas nécessairement compter. Mais il faut examiner le cas où $f_1 = 0$ et avoir recours alors à toutes les formules (17). Si l'on y suppose $x = 0$, elles donnent

$$\frac{\text{N}}{\text{R}} = -\frac{2}{a^2}, \qquad y^2 \frac{a^2 - c^2}{b^2} + z^2 \frac{a^2 - b^2}{c^2} = 0, \qquad \ldots;$$

c'est la solution connue.

X. — Suite de la discussion précédente.

Si, dans l'équation (14) qui fait connaître les rayons de courbure principaux, on suppose $f = \varphi(x, y) - z$, elle devient, après avoir été développée,

$$(21) \qquad \frac{\text{N}^4}{\text{R}^2} - \frac{\text{N}}{\text{R}}[(1 - q^2)r - 2pqs - (1 + p^2)t] + rt - s^2 = 0,$$

N représentant ici $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$. Le produit des courbures principales est donc $\frac{rt - s^2}{\text{N}^4}$. Si donc $rt - s^2 = 0$, l'une des courbures principales est nulle, l'un des rayons de courbure principaux est infini; il en résulte que, dans les surfaces développables qui sont caractérisées par la relation $rt - s^2 = 0$, un rayon de courbure est infini. Si le plan tangent touche une surface suivant une ligne, le long de cette ligne, on a $rt - s^2 = 0$ (p. 309) et un rayon de courbure le long de cette ligne est infini; de pareilles lignes sont ce que l'on appelle des *lignes de points paraboliques*, les points où l'on a $rt - s^2 = 0$ étant ce que l'on appelle des *points paraboliques*.

Revenons à l'équation (14). Le terme indépendant de R est

le déterminant Θ; en l'égalant à zéro, on obtient les points paraboliques, et, s'il est identiquement nul, la surface est développable.

Il est facile de voir que la relation $\Theta = 0$ est équivalente à l'équation

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

obtenue en égalant à zéro le hessien de la fonction f rendue homogène par l'introduction de la variable t.

Pour le prouver, il suffit de multiplier la première colonne du déterminant Θ[formule (15)] par x, la seconde par y, la troisième par z, la quatrième par $m-1$ et de retrancher la somme des trois premières de la dernière, laquelle aura alors pour éléments tf_{14}, tf_{24}, tf_{34}, tf_{4}. Multipliant alors la première ligne par x, la deuxième par y, la troisième par z, la quatrième par $m-1$ et retranchant la somme des trois premières de la dernière, on obtient le hessien de f.

L'équation $\Theta = 0$ détermine sur la surface $f = 0$ une ligne de points paraboliques, Θ est de degré $4(m-2)$: la ligne des points paraboliques est donc de degré $4m(m-2)$; il n'y a donc pas de ligne de points paraboliques sur les surfaces du second ordre non développables.

La ligne des points paraboliques sépare en général la surface en deux régions : sur l'une la surface est à courbures opposées, sur l'autre elle est convexe.

Pour que deux rayons de courbure soient infinis, il faut que l'on ait non seulement $\Theta = 0$, mais encore

$$\frac{\partial\Theta}{\partial f_{11}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{22}} + \frac{\partial\Theta}{\partial f_{33}} = 0.$$

Cette équation est de degré $3m-4$, l'équation $\Theta = 0$ est de degré $4(m-2)$; par suite, il y a, sur toute surface d'ordre m, $4m(m-2)(3m-4)$ points où deux rayons de courbure sont infinis.

XI. — Discussion des équations qui font connaître les sections principales.

Ces équations sont [(13) du § VIII]

$$(1)\qquad \left(f_{11}+\frac{N}{R}\right)x'+f_{12}y'+f_{13}z'+\frac{1}{2}\lambda f_1=0,$$

$$(2)\qquad f_{21}x'+\left(f_{22}+\frac{N}{R}\right)y'+f_{23}z'+\frac{1}{2}\lambda f_2=0,$$

$$(3)\qquad f_{31}x'+f_{32}y'+\left(f_{33}+\frac{N}{R}\right)z'+\frac{1}{2}\lambda f_3=0,$$

$$(4)\qquad f_1x'+f_2y'+f_3z'=0.$$

Si l'on appelle R et R_1 les rayons de courbure principaux, x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1 les valeurs correspondantes des cosinus directeurs des tangentes aux sections principales, X, Y, Z et X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées des centres de courbure principaux; on aura d'abord, en multipliant (1), (2), (3) par x'_1, y'_1, z'_1 et en ajoutant,

$$\Omega+\frac{N}{R}(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1)+\frac{\lambda}{2}(x'_1f_1+y'_1f_2+z'_1f_3)=0$$

ou, en vertu de (4),

$$\Omega=-\frac{N}{R}(x'x'_1+y'y'_1+z'z'_1),$$

Ω désignant une fonction du second degré de x', y', z' et x'_1, y'_1, z'_1; on trouverait d'une façon analogue

$$\Omega=-\frac{N}{R_1}(x'_1x'+y'_1y'+z'_1z');$$

il faut en conclure, si $R \gtrless R_1$,

$$(5)\qquad \Omega=0,\qquad x'_1x'+y'_1y+z'_1z=0;$$

ce qui prouve que deux sections principales, en un point où

les rayons de courbure principaux sont inégaux, sont toujours rectangulaires. On a

$$X = x + \frac{R}{N} f_1, \quad Y = y + \frac{R}{N} f_2, \quad Z = z + \frac{R}{N} f_3,$$

d'où

$$dX = dx + \frac{R}{N} df_1 + f_1 d\frac{R}{N},$$

$$dY = dy + \frac{R}{N} df_2 + f_2 d\frac{R}{N},$$

$$dZ = dz + \frac{R}{N} df_3 + f_3 d\frac{R}{N}.$$

On en déduit, en vertu de (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} & x' dX + y' dY + z' dZ \\ & \quad = x' dx + y' dy + z' dz + \frac{R}{N} (x' df_1 + y' df_2 + z' df_3); \end{aligned} \right.$$

or de (1), (2), (3) on tire aussi, en les multipliant par dx, dy, dz et en les ajoutant,

$$x' df_1 + y' df_2 + z' df_3 + \frac{N}{R} (x' dx + y' dy + z' dz) = 0.$$

Cette équation multipliée par $\frac{R}{N}$ et ajoutée en croix avec (6) donne

$$x' dX + y' dY + z' dZ = 0;$$

ce qui prouve que le déplacement dX, dY, dZ effectué sur le lieu des centres de courbure principaux est perpendiculaire à la tangente à la section principale; le plan tangent au lieu des centres de courbures principaux est perpendiculaire à cette tangente, et, par suite, il coïncide avec une section principale; ainsi :

Le lieu des centres de courbure principaux est l'enveloppe des plans des sections principales.

Cette propriété rappelle celle des développées. Mais l'ana-

logie est loin d'être complète, car une surface quelconque ne peut pas être regardée comme le lieu des centres de courbure d'une autre surface.

En effet : *La surface à deux nappes lieu des centres de courbure d'une surface donnée doit jouir de cette propriété que, de quelque point de l'espace qu'on la regarde, les contours apparents des deux nappes semblent se couper à angles droits.*

Pour le prouver, plaçons l'œil en un point quelconque et considérons la normale à la surface passant par l'œil; deux plans principaux passant par l'œil toucheront la surface lieu des centres de courbure et seront les plans tangents au cône circonscrit mené par l'œil considéré comme sommet de ce cône. Ce cône se composera donc de deux nappes orthogonales, ce qui démontre le théorème énoncé.

La recherche du lieu des centres de courbure principaux d'une surface présentera, en général, de grandes difficultés; mais il sera facile de trouver son équation tangentielle, comme nous le verrons sur un exemple.

XII. — Sur une propriété de maximum relative aux rayons de courbure.

Cherchons le maximum et le minimum de la distance d'un point (α, β, γ) à une surface. Soit (x, y, z) le point de la surface répondant au maximum. Pour ce point la différentielle de $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$ doit être nulle, et l'on a, en égalant à zéro les deux dérivées de cette expression, prises par rapport à x et y,

$$(1) \qquad x - \alpha - p(z-\gamma) = 0, \qquad y - \beta + q(z-\gamma) = 0;$$

si l'on regarde α, β, γ comme des coordonnées courantes, ces équations représentent la normale en x, y, z; donc la solution s'obtient en menant par α, β, γ une normale à la surface. Mais discutons la solution et formons la différentielle

seconde de $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$; elle est égale, à un facteur positif près, à

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}[1+p^2+r(z-\gamma)]dx^2+2[pq+s(z-\gamma)]dx\,dy\\ \qquad\qquad\qquad +[1+q^2+t(z-\gamma)]dy^2.\end{array}\right.$$

Plaçons l'origine en x, y, z, et prenons pour plans de coordonnées les sections principales et le plan tangent en ce point; on aura $z=0$, $p=0$, $q=0$, $s=0$, et l'expression (2) deviendra

$$(1-r\gamma)dx^2+(1-t\gamma)dy^2.$$

Pour que cette quantité conserve le même signe, il faut que $(1-\gamma r)(1-\gamma t)>0$. Or r et t sont les inverses des rayons de courbure principaux; en appelant R et R′ ces rayons, on a donc

$$(a)\qquad \left(1-\frac{\gamma}{R}\right)\left(1-\frac{\gamma}{R'}\right)>0;$$

si R et R′ sont positifs, on doit trouver

$$(\gamma-R)(\gamma-R')>0.$$

Par suite, pour qu'il y ait maximum ou minimum relativement à une surface convexe, il faut que le point donné ne soit pas compris entre les centres de courbure principaux. Si R et R′ sont de signes contraires, la formule (a) revient à

$$(\gamma-R)(\gamma-R')<0;$$

donc, dans le cas d'une surface à courbures opposées, il faut que le point donné soit compris entre les centres de courbure principaux pour qu'il y ait maximum ou minimum.

Les centres de courbure peuvent donc se définir : *des points pour lesquels la différentielle première de*

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$$

est nulle et pour lesquels la différentielle seconde est un carré parfait (p. 346, t. I).

Ils sont donc fournis par la formule (1) d'une part, et par

la formule obtenue en écrivant que (2) est un carré, ce qui donne

$$[pq + s(z - \gamma)]^2 = [1 + p^2 + r(z - \gamma)][1 + q^2 + t(z - \gamma)];$$

or on a $z - \gamma = \frac{-R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$: l'équation aux rayons de courbure principaux est donc

$$\left(pq - \frac{sR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)^2 - \left(1 + p^2 - \frac{rR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)\left(1 + q^2 - \frac{tR}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) = 0.$$

Cette équation développée devient identique à celle que nous avons trouvée plus haut; mais sous cette forme elle se prête mieux à la discussion.

Veut-on prouver, par exemple, qu'elle a ses racines réelles, on l'écrira ainsi, en posant $1 + p^2 + q^2 = N^2$,

$$(3) \quad \left(\frac{Npq}{R} - s\right)^2 - \left[\frac{N(1+p^2)}{R} - r\right]\left[\frac{N(1+q^2)}{R} - t\right] = 0;$$

substituant alors dans le premier membre, à la place de $\frac{N}{R}$,

$$-\infty, \quad \frac{r}{1+p^2}, \quad \frac{t}{1+q^2}, \quad +\infty,$$

on trouve les signes suivants, en observant que $(1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2$ ou $1 + p^2 + q^2$ est positif,

$$-, \quad +, \quad +, \quad -.$$

Donc $\frac{r}{1+p^2}$ et $\frac{t}{1+q^2}$ peuvent servir à séparer les racines qui sont toutes réelles. Pour que deux racines deviennent égales, il est nécessaire qu'elles deviennent alors toutes deux égales à $\frac{r}{1+p^2}$ et à $\frac{t}{1+q^2}$; on doit par suite avoir

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{t}{1+q^2} = \frac{N}{R};$$

mais l'équation (3), dans cette hypothèse, donne

$$\frac{N}{R} = \frac{s}{pq};$$

on a donc en un point où les rayons de courbure sont égaux

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}:$$

c'est l'équation aux ombilics.

XIII. — Sur une forme remarquable que l'on peut donner à l'équation aux rayons de courbure.

Reprenons l'équation aux rayons de courbure

$$\frac{N^4}{R^2} + \frac{N}{R}[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t] + rt - s^2 = 0$$

ou

$$(1) \qquad \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{N^3} + \frac{rt - s^2}{N^4} = 0;$$

soient α, β, γ les cosinus directeurs de la normale, alors

$$\alpha = \frac{p}{N}, \qquad \beta = \frac{q}{N}, \qquad \gamma = \frac{1}{N} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{r(1+q^2) - pqs}{N^3}, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{s(1+q^2) - pqt}{N^3},$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{s(1+p^2) - pqr}{N^3}, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{t(1+p^2) - pqs}{N^3};$$

le coefficient de $\frac{1}{R}$ dans (1) est donc

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}.$$

D'ailleurs on trouve

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{N^6}\begin{vmatrix} r(1+q^2)-pqs & s(1+q^2)-pqt \\ s(1+p^2)-pqr & t(1+p^2)-pqs \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{N^6}\begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1+q^2 & -pq \\ -pq & 1+p^2 \end{vmatrix} = \frac{rt-s^2}{N^4};$$

l'équation (1) peut donc s'écrire sous la forme remarquable

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right) + \frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)} = 0.$$

XIV. — Application aux surfaces du second ordre.

Considérons la surface

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

pour cette surface, l'équation aux rayons de courbure principaux s'écrit

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} A+\frac{N}{R} & 0 & 0 & Ax \\ 0 & B+\frac{N}{R} & 0 & By \\ 0 & 0 & C+\frac{N}{R} & Cz \\ Ax & By & Cz & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où

$$N^2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2.$$

Cette équation développée devient

$$(1\ bis)\qquad \frac{N^4}{R^2} + \frac{N}{R}[(A+B+C)N^2 - (A^3x^2 + B^3y^2 + C^3z^2)]ABC = 0.$$

On peut écrire cette équation autrement. En effet, on peut

la considérer comme résultante de

$$\left(A+\frac{N}{R}\right)\lambda+Ax=0,$$
$$\left(B+\frac{N}{R}\right)\mu+By=0,$$
$$\left(C+\frac{N}{R}\right)\nu+Cz=0,$$
$$\lambda Ax+\mu By+\nu Cz=0,$$

ce qui donne

$$(2)\qquad \frac{A^2x^2}{A+\frac{N}{R}}+\frac{B^2y^2}{B+\frac{N}{R}}+\frac{C^2z^2}{C+\frac{N}{R}}=0.$$

Si l'on appelle ν la corde normale passant en x, y, z et ρ_c la portion de la normale comprise entre le point (x, y, z) et le plan des xy, on a

$$\nu=\pm\frac{2N^3}{A^3x^2+B^3y^2+C^3z^2},$$
$$\rho_c=\frac{N}{C}.$$

L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R}\left(\pm\frac{A+B+C}{C\rho_c}\pm\frac{2}{\nu}\right)+\frac{AB}{C^3\rho_c^4}=0;$$

on en déduit, en appelant R′ et R″ les deux rayons de courbure principaux,

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{A+B+C}{C\rho_c}\pm\frac{2}{\nu},\qquad \frac{1}{R'R''}=\frac{AB}{C^3\rho_c^4},$$
$$\frac{1}{R'}=\frac{AB}{C^3R''^3}\quad\text{ou}\quad\frac{R''^3}{R'}=\text{const.},$$

dans l'hyperboloïde qui a trois génératrices rectangulaires $A+B+C=0$, et l'on a

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=\frac{2}{\nu}.$$

La corde normale est alors moyenne harmonique entre les rayons de courbure principaux.

Le lieu des points où $\frac{N}{R}$ a une valeur constante λ s'obtient en faisant $\frac{N}{R} = \lambda$ dans (2), ce qui donne

$$\frac{A^2x^2}{A-\lambda} + \frac{B^2y^2}{B-\lambda} + \frac{C^2z^2}{C-\lambda} = 0.$$

On peut donner à cette équation une forme remarquable en la combinant avec celle de la surface elle-même; on a alors

$$\frac{A^2x^2}{A-\lambda} - \frac{A^2x^2}{A} + \frac{B^2y^2}{B-\lambda} - \frac{B^2y^2}{B} + \frac{C^2z^2}{C-\lambda} - \frac{C^2z^2}{C} = -1,$$

$$\frac{\lambda A x^2}{A-\lambda} + \frac{\lambda B y^2}{B-\lambda} + \frac{\lambda C z^2}{C-\lambda} = -1$$

ou encore

$$\frac{x^2}{\frac{1}{A}-\frac{1}{\lambda}} + \frac{y^2}{\frac{1}{B}-\frac{1}{\lambda}} + \frac{z^2}{\frac{1}{C}-\frac{1}{\lambda}} = 1.$$

Cette équation représente une surface homofocale avec la surface proposée. Elle découpe sur la surface proposée une série de lignes que nous retrouverons sous le nom de *lignes de courbure*.

On peut observer que, en vertu de (1 *bis*), on a

$$\frac{1}{R'R''} = \frac{ABC}{N^4}$$

et, par suite,

$$\frac{R''^3}{R'} = ABC\left(\frac{R''}{N}\right)^4.$$

Le long d'une ligne où $\frac{R''}{N}$ est constant, on voit que $\frac{R''^3}{R'}$ sera constant. Ainsi, *le long d'une ligne de courbure, le quotient* $\frac{R''^3}{R'}$ *est constant.*

XV. — Surface lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde.

Pour trouver le lieu des centres de courbure de l'ellipsoïde, on pourrait faire usage des formules qui précèdent, mais on obtient le résultat sous une forme plus élégante comme il suit : considérons l'ellipsoïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Coupons-le par la sphère

$$(2) \qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2;$$

l'équation générale des surfaces du second ordre passant par l'intersection sera

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2-(z-\gamma)^2+R^2=0,$$

et, pour que cette surface soit conique, il faudra écrire que l'on a à la fois

$$\frac{\lambda x}{a^2}=x-\alpha, \qquad \frac{\lambda y}{b^2}=y-\beta, \qquad \frac{\lambda z}{c^2}=z-\gamma,$$

$$R^2+\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)+\gamma(z-\gamma)-\lambda=0;$$

et l'on éliminera x, y, z, ou plutôt $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ entre

$$(x-\alpha)\left(\frac{\lambda}{a^2}-1\right)+\frac{\lambda\alpha}{a^2}=0, \qquad \ldots,$$

$$\alpha(x-\alpha)+\beta(y-\beta)+\gamma(z-\gamma)+R^2-\lambda=0,$$

ce qui donnera

$$\frac{\frac{\lambda\alpha^2}{a^2}}{1-\frac{\lambda}{a^2}}+\ldots+R^2-\lambda=0$$

ou bien

$$(3) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2-\lambda}+\frac{\beta^2}{b^2-\lambda}+\frac{\gamma^2}{c^2-\lambda}+\frac{R^2}{\lambda}=1.$$

D'un autre côté, si l'on cherche l'expression du rayon de courbure ρ de l'ellipsoïde (1), on trouve qu'elle est donnée par la formule du paragraphe précédent

$$\frac{x^2}{a^2 - a^4 \frac{N}{\rho}} + \frac{y^2}{b^2 - b^4 \frac{N}{\rho}} + \frac{z^2}{c^2 - c^4 \frac{N}{\rho}} = 0,$$

où

$$(4) \qquad N^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}.$$

Si l'on combine cette équation avec

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve, en retranchant membre à membre,

$$\frac{x^2}{a^2 - \frac{\rho}{N}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{\rho}{N}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{\rho}{N}} + \frac{1}{\frac{\rho}{N}} = 0.$$

Supposons maintenant $R = \rho$; cette équation deviendra

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2 - \frac{R}{N}} + \frac{y^2}{b^2 - \frac{R}{N}} + \frac{z^2}{c^2 - \frac{R}{N}} + \frac{1}{\frac{R}{N}} = 0;$$

d'ailleurs on aura

$$\alpha = x - \frac{R}{N}\frac{x}{a^2} = \frac{x}{a^2}\left(a^2 - \frac{R}{N}\right).$$

L'équation (3) donnera alors

$$\frac{x^2}{a^4}\frac{\left(a^2 - \frac{R}{N}\right)^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^4}\frac{\left(b^2 - \frac{R}{N}\right)^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^4}\frac{\left(c^2 - \frac{R}{N}\right)}{c^2 - \lambda} + \frac{R^2}{\lambda} = 1,$$

et l'on peut voir que cette équation est satisfaite par $\frac{R}{N} = \lambda$; en effet, son premier membre devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right) + \lambda N^2,$$

c'est-à-dire égal à l'unité, en vertu de (1) et (4).

On peut s'assurer également que les dérivées de (3)

$$\frac{\alpha^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{\beta^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{\gamma^2}{(c^2-\lambda)^2}-\frac{R^2}{\lambda^2}=0,$$
$$\frac{\alpha^2}{(a^2-\lambda)^3}+\frac{\beta^2}{(b^2-\lambda)^3}+\frac{\gamma^2}{(c^2-\lambda)^3}+\frac{R^2}{\lambda^3}=0,$$

sont satisfaites en prenant $\lambda=\frac{R}{N}$; dans cette hypothèse, elles se réduisent en effet à

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}-N^2=0,$$

$$\frac{x^2}{a^4}\frac{1}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^4}\frac{1}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^4}\frac{1}{c^2-\lambda}+\frac{N^2}{\lambda}=0;$$

la première est la définition de N^2, la seconde combinée avec la première donne

$$\frac{x^2}{a^4}\left(\frac{1}{a^2-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)+\ldots=0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}\frac{1}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2}\frac{1}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2}\frac{1}{c^2-\lambda}=0:$$

c'est l'équation qui définit les rayons de courbure en x, y, z, quand on y remplace λ par $\frac{R}{N}$.

Ainsi donc :

Pour trouver le lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde, il suffit de chercher son intersection avec la sphère (1) *et d'exprimer que l'équation* (3) *a une racine triple : le centre de la sphère ainsi déterminé sera sur la surface cherchée.*

Appliquons ce théorème : appelons λ, μ, ν, ρ les racines de l'équation (3) pour des valeurs données de α, β, γ, R; cette équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\alpha^2(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)\lambda+\ldots\\&\quad+R^2(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)=\lambda(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda).\end{aligned}$$

Le produit $\lambda\mu\nu\rho$ des racines de cette équation est égal à

$$R^2 a^2 b^2 c^2;$$

on a donc

$$R^2 = \frac{\lambda\mu\nu\rho}{a^2 b^2 c^2}.$$

Si l'on change $a^2 - \lambda$ en λ', la même équation (3) prendra la forme

$$\frac{\alpha^2}{\lambda'} + \frac{\beta^2}{b^2 - a^2 + \lambda'} + \frac{\gamma^2}{c^2 - a^2 + \lambda'} + \frac{R^2}{a^2 + \lambda'} = 1;$$

en chassant les dénominateurs et en écrivant que le produit des racines est $(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)(a^2 - \rho)$, on trouve

$$\alpha^2 = \frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)(a^2 - \rho)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)a^2},$$
$$\beta^2 = \frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)(b^2 - \rho)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)b^2},$$
$$\gamma^2 = \frac{(c^2 - \lambda)(c^2 - \mu)(c^2 - \nu)(c^2 - \rho)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)c^2},$$
$$R^2 = \frac{\lambda\mu\nu\rho}{a^2 b^2 c^2}.$$

Prenons $\mu = \nu = \rho$ et les équations suivantes feront connaître les centres de courbure de l'ellipsoïde, ainsi que le rayon correspondant,

$$\alpha^2 = \frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)^3}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)a^2},$$
$$\beta^2 = \frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)^3}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)b^2},$$
$$\gamma^2 = \frac{(c^2 - \lambda)(c^2 - \mu)^3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)c^2},$$
$$R = \frac{\lambda\mu^3}{a^2 b^2 c^2}.$$

Cette méthode est de M. Darboux.

XVI. — Courbure des courbes tracées sur une surface ou théorème de Meusnier et ses conséquences.

Proposons-nous de trouver le rayon de courbure d'une courbe tracée sur la surface

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

L'équation (1) sera l'une des équations de cette courbe; quant à l'autre, nous ne l'écrirons pas. Le centre de courbure de la courbe se trouve : 1° sur l'axe du cercle osculateur, lequel a pour équations

$$\left\{ \begin{array}{l} (X - x)dx + (Y - y)dy + (Z - z)dz = 0, \\ (X - x)d^2x + (Y - y)d^2y + (Z - z)d^2z = ds^2; \end{array} \right. \tag{2}$$

2° sur le plan osculateur. Il est inutile, je crois, de rappeler que les équations (2) sont celles du plan normal et celles du plan normal infiniment voisin, dont on a retranché la première. Les formules (2) jointes à l'équation du plan osculateur feront connaître les coordonnées X, Y, Z du centre de courbure.

Mais ce n'est pas encore là que nous voulons en arriver. La première équation (2) est celle d'un plan passant par la normale à la surface : cette normale rencontre donc l'axe du cercle osculateur; cherchons le point de rencontre en question. Les équations de la normale sont

$$\frac{X - x}{f_1} = \frac{Y - y}{f_2} = \frac{Z - z}{f_3} = \frac{\rho}{N}, \tag{3}$$

ρ désignant la distance du point de rencontre au point (x, y, z). Si l'on élimine $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ entre (2) et (3), on trouve :

1° L'identité

$$f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = 0; \tag{4}$$

2° La formule

$$(5)\qquad \frac{\rho}{N}(f_1 d^2x + f_2 d^2y + f_3 d^2z) = ds^2$$

ou

$$(6)\qquad \frac{\rho}{N} = \frac{ds^2}{f_1 d^2x + f_2 d^2y + f_3 d^2z}.$$

Or, en différentiant (4), on a

$$f_1 d^2x + f_2 d^2y + f_3 d^2z$$
$$= -(f_{11} d^2x + f_{22} d^2y + f_{33} d^2z + 2f_{23}\,dy\,dz + 2f_{13}\,dx\,dz + 2f_{12}\,dx\,dy);$$

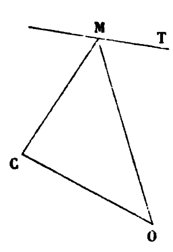
par suite, (6) affecte la forme

$$(6\ bis)\qquad \frac{\rho}{N} = \frac{ds^2}{\varphi(dx, dy, dz)};$$

en d'autres termes, ρ ne dépend pas de d^2x, d^2y, d^2z, il ne dépend que de dx, dy, dz. Donc :

Les axes des cercles osculateurs de toutes les courbes tracées sur la surface et possédant la même tangente en M *rencontrent la normale à la surface en* M, *au même point, qui est évidemment le centre de courbure de la section normale passant en* M *suivant la tangente considérée.*

Fig. 38.



Soient

MT la tangente;
MO la normale à la surface;

CO l'axe du cercle osculateur d'une courbe dont CM est le rayon de courbure;

O sera le centre de courbure de la section normale et l'on aura, en appelant γ l'angle que le plan osculateur de la courbe fait avec le plan de la section normale,

$$\mathrm{MC} = \rho \cos\gamma.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème de Meusnier. — *Le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée en un point d'une surface est la projection du rayon de courbure de la section normale passant en ce point sur le plan osculateur de cette courbe.*

Corollaire. — *Le rayon de courbure d'une courbe quelconque tracée sur une surface est égal à celui de la section faite par son plan osculateur dans la surface.*

Il est facile d'en conclure que le lieu des centres de courbure de toutes les lignes qui passent par un point donné d'une surface est une surface du quatrième degré dont les sections normales sont circulaires et dont l'équation est

$$z(x^2+y^2) = (x^2+y^2+z^2)\left(\frac{x^2}{\mathrm{R}_1}+\frac{y^2}{\mathrm{R}_2}\right),$$

R_1 et R_2 désignant les rayons de courbure principaux en x, y, z. Cette surface est, bien entendu, osculatrice de la surface proposée.

XVII. — Théorème de Hachette.

Nous représenterons la courbure d'une courbe par une droite numériquement égale à cette courbure et portée sur la normale principale. Les composantes de la courbure seront alors $\frac{d^2x}{ds^2}$, $\frac{d^2y}{ds^2}$, $\frac{d^2z}{ds^2}$ (p. 362).

Considérons une courbe tracée sur deux surfaces

$$f = 0, \qquad \mathrm{F} = 0;$$

en différentiant ces équations et en nous servant toujours des mêmes notations, nous aurons

$$f_1 \frac{dx}{ds} + f_2 \frac{dy}{ds} + f_3 \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} + F_3 \frac{dz}{ds} = 0,$$

et, en différentiant encore,

$$f_{11}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2f_{21} \frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \ldots + f_1 \frac{d^2x}{ds^2} + \ldots = 0,$$

$$F_{11}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2F_{21} \frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + \ldots + F_1 \frac{d^2x}{ds^2} + \ldots = 0.$$

Si l'on pose $\frac{dx}{ds} = x'$, $\frac{dy}{ds} = y'$, $\frac{dz}{ds} = z'$ et si l'on désigne par X, Y, Z les composantes de la courbure, on pourra écrire ainsi ces formules

$$\varphi(x', y', z') + f_1 X + f_2 Y + f_3 Z = 0,$$
$$\Phi(x', y', z') + F_1 X + F_2 Y + F_3 Z = 0,$$

en désignant par φ et Φ les termes du second degré en x', y', z' qui entrent dans les formules précédentes. On a d'ailleurs

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0;$$

de ces trois formules on tire

$$(1)\quad X = \frac{-[y'(\Phi f_3 - \varphi F_3) - z'(\Phi f_2 - \varphi F_2)]}{x'(f_2F_3 - f_3F_2) + y'(f_3F_1 - f_1F_3) + z'(f_1F_2 - f_2F_1)}.$$

Supposons que, dans cette formule, on remplace $F(\xi, \eta, \zeta)$ par $(\xi - x)F_1 + (\eta - y)F_2 + (\zeta - z)F_3$, c'est-à-dire que l'on remplace la surface $F = 0$ par son plan tangent; en appelant X_F la valeur que prend X, il viendra

$$X_F = \frac{(y'F_3 - z'F_2)\varphi}{x'(f_2F_3 - f_3F_2) + \ldots},$$

$$X_f = \frac{-(y'f_3 - z'f_2)\Phi}{x'(f_2F_3 - f_3F_2) + \ldots};$$

on en conclut

$$X = X_f + X_F.$$

Cette formule et ses analogues montrent que :

Théorème de Hachette. — *La courbure d'une courbe tracée sur deux surfaces est la résultante des courbures des courbes d'intersection de chaque surface par le plan tangent de l'autre.*

XVIII. — Des points singuliers des surfaces.

On appelle *points singuliers* d'une surface les points pour lesquels le z ne peut être supposé développable par la formule de Taylor, quelque petits que soient les accroissements de x, y, et cela même après une transformation de coordonnées; c'est-à-dire qu'en un point singulier les dérivées du z sont indéterminées, infinies ou discontinues.

Nous ne nous occuperons ici que des surfaces dont l'équation est de la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

f désignant une fonction toujours développable par la formule de Taylor pour des valeurs suffisamment petites des accroissements de x, y, z. Les surfaces algébriques sont dans ce cas.

Nous avons vu que, si $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ n'étaient pas tous trois nuls, le lieu des tangentes en ce point à la surface était un plan, et nous avons déclaré *singulier* tout point où l'on avait à la fois

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Théorème I. — *En un point singulier, le lieu des tangentes à la surface est un cône du second degré, si toutes les dérivées du second ordre de f ne sont pas nulles. Sinon le lieu sera un cône du troisième degré, à moins que toutes les dérivées du troisième ordre ne soient nulles,* etc.

En effet, l'équation d'une tangente est

$$(1) \qquad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

dx, dy, dz désignant trois quantités infinitésimales liées entre elles par la relation

$$f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz) = 0,$$

où $f(x, y, z) = 0$. Si donc $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ sont nuls, on a, par la formule de Taylor,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz + \ldots\right] + \omega = 0,$$

ω désignant des termes du troisième ordre, que l'on peut négliger. L'élimination de dx, dy, dz entre cette formule et (1) donne le lieu des tangentes

$$(X-x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2(Y-y)(Z-z)\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} + \ldots = 0;$$

ce lieu est un cône du second degré, et l'on voit sans peine qu'il serait du troisième si toutes les dérivées secondes de f étaient nulles.

On appelle *points doubles* tous ceux pour lesquels le lieu des tangentes est un cône du second degré; *points triples* ceux pour lesquels le lieu des tangentes est un cône du troisième degré, etc.

Nous voyons que, pour qu'un point soit un point simple d'une surface, il faut une condition

$$f = 0;$$

pour qu'un point soit double, il faut $4 = 1 + 3$ conditions

$$f = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

pour qu'un point soit triple, il en faut $1 + 3 + 6 = 10$:

$$f = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

En général, pour qu'un point soit d'ordre p, il faut

$$1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{p(p+1)}{2} = \frac{p(p+1)(p+2)}{6}$$

conditions.

Ainsi *assujettir une surface du second degré à avoir un point double en un point déterminé de l'espace, c'est l'assujettir à quatre conditions;* donc les cônes ayant leur sommet donné ne peuvent plus être assujettis qu'à cinq conditions, ce que l'on savait.

Supposons que l'on prenne pour origine des coordonnées un point d'ordre de multiplicité p; l'équation de la surface prendra la forme

$$(1) \qquad 0 = f_p + f_{p+1} + f_{p+2} + \ldots,$$

f_p désignant un polynôme du degré p en x, y, z; f_{p+1} un polynôme du degré $p+1$, ... Le cône des tangentes à l'origine aura pour équation

$$f_p = 0.$$

Coupons la surface par la droite

$$x = \alpha\rho, \qquad y = \beta\rho, \qquad z = \gamma\rho,$$

nous aurons

$$0 = \rho^p f_p(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^{p+1} f_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots.$$

Cette équation a p racines nulles; donc :

THÉORÈME II. — *Toute droite passant par un point d'ordre p doit être censée rencontrer la surface en p points coïncidents.*

Cependant, si l'on a $f_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, c'est-à-dire *si la droite est une génératrice du cône tangent, elle rencontrera la surface en* $p+1$ *points coïncidents,* car l'équation en ρ aura $p+1$ racines nulles.

Enfin, si l'on a à la fois

$$f_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0, \qquad f_{p+1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

L'équation en ρ aura $p+2$ racines nulles; donc *il existe sur le cône tangent* $p(p+1)$ *génératrices rencontrant la surface en* $p+2$ *points confondus en un seul.*

En particulier, *les tangentes en un point simple rencontrant la surface en deux points confondus, deux d'entre elles rencontrent la surface en trois points confondus.* Ce sont les asymptotes de l'indicatrice.

Ainsi *les asymptotes de l'indicatrice sont des droites osculatrices, ayant avec la surface un contact du deuxième ordre.*

Il pourra enfin arriver que l'équation $f_{p+2} = 0$ admette des solutions de $f_p = 0$, $f_{p+1} = 0$, et, dans ce cas (exceptionnel, il ne faut pas l'oublier), certaines tangentes pourront rencontrer la surface en plus de $p+2$ points.

Il va sans dire que les plans passant par un point multiple d'ordre p couperont en général la surface suivant des courbes présentant des points multiples d'ordre p.

Supposons qu'il s'agisse d'un point double, le cône des tangentes sera du second degré :

1° *Le cône des tangentes est un cône réel ou imaginaire proprement dit.*

Le point multiple est alors un point *conique,* si le cône est réel, ou un point isolé, si le cône est imaginaire.

2° *Le cône des tangentes se réduit à deux plans distincts.*

Le point multiple est dit point double *biplanaire.*

3° *Le cône des tangentes est un plan double*; alors le point est dit *uniplanaire.*

Lorsque le cône des tangentes en un point est d'un degré

supérieur, on définit ordinairement la nature du point multiple en indiquant la nature du cône en question.

Il existe sur quelques surfaces des *lignes singulières*, le long desquelles tous les points de la surface sont singuliers. Pour qu'il existe sur une surface une pareille ligne, il faut que les équations $f=0$ de la surface et ses dérivées $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$ aient une solution continue.

Une ligne singulière est une ligne double, triple, ..., quand elle est l'intersection de deux, trois nappes de la surface.

XIX. — Points singuliers des courbes gauches.

Considérons une courbe gauche définie par deux équations algébriques

$$(1)\qquad \varphi(X, Y, Z)=0, \qquad \psi(X, Y, Z)=0.$$

Transportons l'origine au point (x, y, z) de cette courbe, et posons

$$(2)\qquad X=x+\xi, \qquad Y=y+\eta, \qquad Z=z+\zeta,$$

les équations (1) et (2) deviendront, en leur appliquant la formule de Taylor et en observant que $\varphi(x,y,z)$ et $\psi(x,y,z)$ sont nuls,

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} 0=\xi\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\omega, \\ 0=\xi\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\eta\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\zeta\dfrac{\partial\psi}{\partial z}+\varpi, \end{cases}$$

ω et ϖ désignant des termes du second ordre en ξ, η, ζ. Si l'on fait $\xi=\rho\alpha$, $\eta=\rho\beta$, $\zeta=\rho\gamma$, α, β, γ désignant les projections de la longueur un, portée dans la direction ξ, η, ζ sur les axes de coordonnées, on a

$$(2\ bis)\qquad \begin{cases} 0=\alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\gamma\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}+\rho\omega_1, \\ 0=\alpha\dfrac{\partial\psi}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\gamma\dfrac{\partial\psi}{\partial z}+\rho\varpi_1, \end{cases}$$

ω_1 et ϖ_1 désignant des quantités finies pour $\rho = 0$. Ces deux équations font connaître les coefficients directeurs de la sécante issue du point (x, y, z) et terminée à un point quelconque $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ de la courbe, et, quand on fait converger ρ vers zéro, les équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \\ \alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right.$$

font connaître les coefficients directeurs de la tangente à la courbe, à savoir

$$(3\ bis) \qquad \alpha : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = \beta : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, x)} = \gamma : \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}.$$

En général, ces rapports ont des valeurs bien déterminées, et la tangente rencontre la courbe en *deux* points confondus; il n'y a d'ailleurs qu'une seule droite rencontrant la courbe en deux points confondus en x, y, z. Toutefois, la tangente pourra avoir avec la courbe un nombre de points communs en x, y, z supérieur à deux : c'est ce qui arriverait si les valeurs de α, β, γ tirées de (3) ou (3 *bis*) annulaient ω_1 et ϖ_1.

Avant d'examiner le cas où les trois déterminants qui figurent dans (3 *bis*) seraient nuls, nous en supposerons deux nuls, pour faire observer que le rapport $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé; si l'on suppose, par exemple, $\alpha = \beta = 0$, la tangente à la courbe gauche est bien déterminée; mais, comme cette tangente est parallèle aux z, sa projection se réduit à un point sur le plan des xy. On sait, en effet, que, dans ce cas, la projection présente un rebroussement.

Supposons maintenant que l'on ait à la fois

$$(4) \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, z)} = 0, \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(z, x)} = 0, \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = 0;$$

α, β, γ sont indéterminés et $\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ est égal, à un

facteur près, à $\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z}$, ou, si l'on veut, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : \frac{\partial \psi}{\partial z} = \lambda;$$

les surfaces (1) sont tangentes, et l'on peut remplacer le système (2) par le suivant, obtenu en combinant les équations de ce système par voie d'addition

$$\begin{aligned} o &= \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \rho \omega_1, \\ o &= \rho(\omega_1 - \lambda \varpi_1), \end{aligned}$$

ou, en divisant la seconde par ρ et en remplaçant ω_1 et ϖ_1 par leurs valeurs

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} o &= \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \omega_1 \rho, \\ o &= \alpha^2 \frac{\partial^2(\varphi - \lambda\psi)}{\partial x^2} + \ldots + 2\beta\gamma \frac{\partial^2(\varphi - \lambda\psi)}{\partial y\, \partial z} + \ldots + \varpi_2 \rho, \end{aligned} \right.$$

ϖ_2 désignant une quantité finie pour $\rho = o$. Si alors on fait tendre ρ vers zéro, on obtient en général deux équations limites qui feront connaître *deux* valeurs des rapports $\alpha : \beta : \gamma$; nous sommes en présence d'un point *double*.

Nous nous arrêterons ici; on voit sans peine comment on devrait continuer la discussion, qui présentera de grandes difficultés dans la pratique, à cause des équations à plusieurs inconnues que l'on peut être obligé de considérer. Nous fixerons seulement l'attention du lecteur sur deux points :

Ne doivent être considérés comme points singuliers dans les courbes gauches que ceux où les coefficients directeurs de la corde infiniment petite sont discontinus ou indéterminés.

Ainsi, la présence d'un point singulier dans la projection d'une courbe gauche ne décèle en aucune façon la présence d'un point singulier dans la courbe elle-même. Si, par exemple, une projetante parallèle à l'axe des z rencontre la

courbe gauche en deux points, son pied sur e plan des xy sera un point double.

Lorsque deux surfaces se touchent, leur intersection présente ordinairement un nœud au point de contact.

EXERCICES ET NOTES.

1. L'équation aux rayons de courbure principaux en coordonnées semi-polaires est

$$\frac{R^2}{N}(a'c' - b'^2) - \frac{R}{N}(ac' + ca' - bb') + ac - b^2 = 0,$$

formule où l'on a posé

$$N^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$a = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial z}{\partial r}, \qquad a' = r^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$b = \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}, \qquad b' = \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial r},$$

$$c = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}, \qquad c' = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2.$$

2. Le lieu des centres de courbure principaux d'une surface développable est la surface rectifiante (p. 388) de son arête de rebroussement.

3. Soient

$\frac{1}{\rho}$ la courbure d'une surface dans une direction donnée;
i l'angle que cette direction fait avec sa conjuguée;
R et R' les rayons de courbure principaux de la surface,

on a

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{\sin i}{\rho}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) + \frac{1}{RR'} = 0.$$

(NICOLAIDÈS, *Comptes rendus;* 1865.)

4. Dans l'hyperboloïde dont le cône asymptote possède trois génératrices formant un trièdre trirectangle, la corde normale est moyenne harmonique entre les deux rayons de courbure principaux.

5. Trouver le lieu des centres des surfaces du second degré de révolution, osculatrices entre elles en un point donné.

6. Trouver l'équation des surfaces du second degré, osculatrices en un point donné d'une surface et ayant un sommet au point d'osculation. — Lieu des centres de ces surfaces.

7. Étant donné un système de surfaces du second degré homofocales, trouver le lieu de leurs ombilics.

8. Parmi les surfaces du troisième degré, y en a-t-il qui possèdent une ligne ombilicale, c'est-à-dire dont tous les points soient des ombilics ?

9. Trouver les ombilics de la surface des ondes (p. 387).

10. La surface des ondes a-t-elle des points paraboliques ?

11. Étant donnée une fonction f de trois variables x, y, z coordonnées d'un même point (fonction de point d'après Lamé), démontrer que l'on peut toujours prendre des axes de coordonnées, tels que la fonction ait en un point donné des dérivées $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nulles.

12. Par l'origine des coordonnées ou même des droites égales et parallèles aux rayons de courbure principaux d'un ellipsoïde, étudier le lieu des extrémités des droites ainsi menées.

FIN DU TOME DEUXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I.

Des questions de Géométrie plane qui dépendent des infiniment petits du premier ordre.

CHAPITRE II.

Étude des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

CHAPITRE III.

Étude des points singuliers.

CHAPITRE IV.

Des questions de Géométrie dans l'espace qui dépendent d'infiniment petits du premier ordre.

CHAPITRE V.

Des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur.

CHAPITRE VI.

Des questions qui dépendent d'infiniment petits d'ordre supérieur au premier dans les surfaces.

FIN DE LA TABLE DU TOME DEUXIÈME.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
27	4	$\frac{y-b}{q}dy$	$\frac{y-b}{p}dy$
29	15	$ap, by, cr, \ldots$	$ap, bq, cr, \ldots$
45	4	$R\cos\theta$	$R\cos\omega$
45	29	$2k^2 : OK$	$k^2 : 2OK$
46	15	IB	CB
47	6	$MN - NQ$	$MN \times NQ$
67	8	$-\eta e^{\pm C\sqrt{-1}}\zeta - e^{\pm B\sqrt{-1}} = 0$	$-\eta e^{\pm C\sqrt{-1}} - \zeta e^{\pm B\sqrt{-1}} = 0$
97	2	$(dx^2 + dy^2)^2$	$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}$
102	9	ds^3	ds^4
104	2	$-d^2y\,dx$	$-d^2x\,dy$
109	20	$ax = -c^2\sin^3\varphi$	$ax = \xi c^2\cos^3\varphi$
109	22	$by = c^2\cos^3\varphi$	$by = -c^2\sin^3\varphi$
119	22	$\frac{(k^2 + k^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{-2k^2 + k^2\theta^2}$	$-\frac{(k^2 + k^2\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2k^2 + k^2\theta^2}$
120	2	$\frac{N^3}{r^2 - 2k^2}$	$\frac{N^3}{r^2 + 2k^2}$
170	4	$y = \frac{1}{\eta}$	$y = \eta$
177	2, 7, 10	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\alpha}{\beta}$
236	12	$2a_3a_4zt$	$2a_{34}zt$
243	19	$dy(2z - \gamma)$	$dz(2z - \gamma)$
253	23	$\frac{z-a}{z-c}$	$\frac{x-a}{z-c}$
321	5	et les focales est constante	et les focales avec le plan des focales est constante
327	13	$\frac{y^2}{p-q}$	$\frac{y^2}{q-p}$
327	24	$\frac{p}{z}, \quad \frac{q}{z}$	$\frac{p}{2}, \quad \frac{q}{2}$
341	21	triangle de référence d'une tangente.	tétraèdre de référence d'un plan tangent.
350	8	$C(Z - z - \Delta z) - D = 0$	$C(Z - z - \Delta z) = 0$
355	20	l'angle PMP'	le triangle PMP'
360	16	$= ds^2$	$+ ds^2 = 0$
364	14	$-2(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z^2)$	$-(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2$
364	18	$-2\,ds\,d^2s$	$-(ds\,d^2s)^2$
389	20	plan, tangente	plan tangent
431	5	directrice	direction
431	6	$\frac{\sin^2\alpha'}{R}$	$\frac{\sin^2\alpha'}{R'}$

11385 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

SECOND ERRATA.

Tome II.

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
12	19	$ax+bx+c$	$ax+by+c$
18	24	sous-normales	sous-tangentes
71	11	$\frac{\zeta}{\cdots}$	$\frac{-\zeta}{\cdots}$
71	15	$\xi=\frac{dy}{\cdots}$	$\xi=\frac{-dy}{\cdots}$
71	15	$\eta=\frac{-dx}{\cdots}$	$\eta=\frac{dx}{\cdots}$
87	12	d'ordre $n+1$. Par	d'ordre $n+1$ par
87	13	point M, on	point M. On
106	32	$R\,dR$	$-R\,dR$
158	19	qui ne l'annule	qui ne s'annule
174	7, 8	φ'_c	$\varphi'_m(c)$
186	19	$\frac{m(m+1)}{3}$	$\frac{m(m+3)}{2}$
285	17	(2) et (10)	(6) et (10)
288	13	*supprimez* avec (6)	
307	2	$q=\frac{\alpha''}{\alpha'}\cdots$	$q=-\frac{\alpha''}{\alpha'}\cdots$
307	3	$p=\frac{\beta'}{\beta''}\cdots$	$p=-\frac{\beta''}{\beta'}\cdots$
307	6	$p=\frac{\beta''}{\alpha'\beta''+\beta'\alpha''}$	$p=\frac{\beta''}{\alpha'\beta''-\beta'\alpha''}$
307	6	$q=\frac{\alpha''}{\alpha'\beta''+\beta'\alpha''}$	$q=\frac{-\alpha''}{\alpha'\beta''-\beta'\alpha''}$
369	24	$\sqrt{A^3+B^3+C^3}$	$\sqrt{A^2+B^2+C^2}$
395	25	$(a'da-b'db-c'dc)$	$(a'da+b'db+c'dc)$
400	12	$\left(Z-\frac{h}{2\pi}\varphi\right)$	$-\left(Z-\frac{h}{2\pi}\varphi\right)$
402	14	$z=0$	$Z=0$
420	18	$A+Cq=0$	$A+Cp=0$
420	19	$B+Cp=0$	$B+Cq=0$
437	2, 6	(7)	(7 *bis*)
438	4	$+\Theta$	$-\Theta$

Pages.	Lignes.	Au lieu de	Lisez
439	11, 14; 15, 16; 17, 19	$-\frac{N}{R}$	$+\frac{N}{R}$
439	17	f_{12}	f_{22}
444	21	$x'_1 x' + y'_1 y + z'_1 z = 0$	$x'_1 x' + y'_1 y' + z'_1 z' = 0$
450	14	$]ABC = 0$	$] + ABC = 0$
458	7	$(f_{11} d^2 x + f_{22} d^2 y + f_{33} d^2 z)$	$(f_{11} dx^2 + f_{22} dy^2 \cdots f_{33} dz^2)$